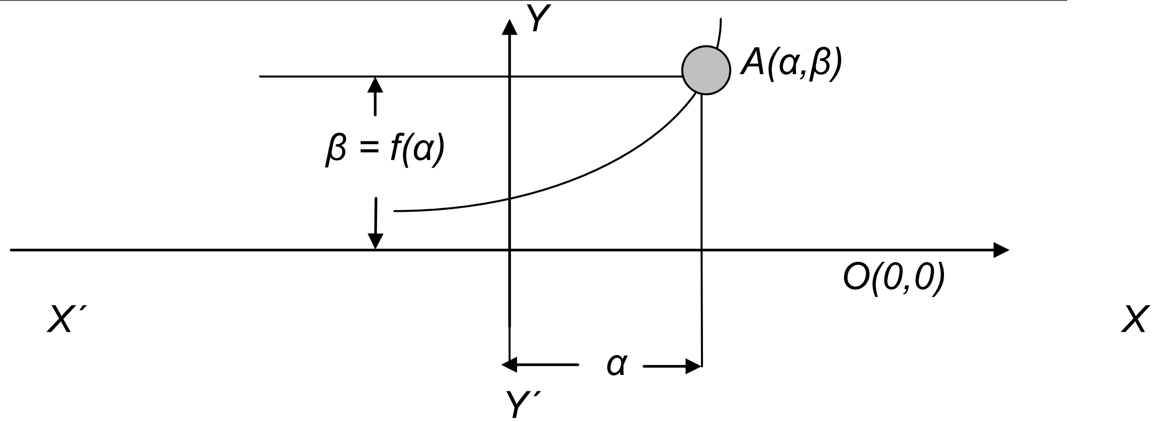
ΛΥΜΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Η *συνάρτηση* $f : D_f \to \mathbb{R}$ $\left(D_f : \text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in D_f$ *όταν ισχύει* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Το σημείο Α(α,β) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρησης f όταν β = f(α) δηλ αν στο τύπο της f θέσω οπου x την τετμημένη του σημείου Α θα πάρω την τεταγμένη του Α

Το Α(α,β) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρησης όταν : f (Τετμημένη του Α) = Τεταγμένη του Α



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Η *συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 6}, x \in (-\infty, 1) \cup (1, 6) \cup (6, +\infty) \\ \alpha - \dfrac{\beta}{5}, x = 1 \\ \alpha + \beta, x = 6 \end{cases}$

Να βρεθούν τα α, β *όταν η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στα σημείο* $x_0 = 1$ *και η γραφική παράσταση της* f *να διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{A}(6,7)$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ x^2-7x+6=0\,(1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 6=49-24=25$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta>0\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (1)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\iota\sigma\varepsilon\varsigma:$

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{7+5}{2}=\frac{12}{2}=6\\ \frac{7-5}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

$$x^2-7x+6\ \overset{\substack{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)\\ \rho_1,\rho_2:\mathrm{O}\iota\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\varsigma\\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\ \alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\alpha\neq 0\ \mu\varepsilon\Delta>0}}{=}\ (x-6)(x-1)$$

$\mathrm{A}\nu\ x\in(-\infty,1)\cup(1,6)\cup(6,+\infty)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-7x+6}=\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x-6)\cancel{(x-1)}}=\frac{x}{x-6}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-6}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\overset{f(1)=\alpha-\frac{\beta}{5}}{\Longleftrightarrow}\alpha-\frac{\beta}{5}=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5\left(\alpha-\frac{\beta}{5}\right)=5\left(-\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow 5\alpha-5\frac{\beta}{5}=-1\Leftrightarrow$$

$$\boxed{5\alpha-\beta=-1}\,(1)$$

$$\mathrm{A}(6,7)\in C_f\Leftrightarrow f(6)=7\overset{f(6)=\alpha+\beta}{\Longleftrightarrow}\boxed{\alpha+\beta=7}\,(2)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\underline{\left.\begin{cases}5\alpha-\beta=-1\\ \alpha+\beta=7\end{cases}\right\}}(+)$$

$$5\alpha-\beta+\alpha+\beta=-1+7\Leftrightarrow 6\alpha=6\Leftrightarrow\cancel{6}\cdot\alpha=\cancel{6}\cdot 1\ \overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha\neq 0\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha:\\ \alpha\beta=\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow}\ \alpha=1$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \alpha=1\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (2):$

$$\alpha+\beta=7\overset{\alpha=1}{\Longleftrightarrow}1+\beta=7\Leftrightarrow\beta=7-1\Leftrightarrow\beta=6$$

2.

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-2x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)\\ 3\alpha^2-2\alpha+1, x=2\\ \dfrac{(3a+2)^{2013}+(6a+1)^{2011}+(9a)^{2009}}{(12a-1)^{2009}+(24a-5)^{2007}+(9a^2+2)^{2005}}, x=0\end{cases}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$ τότε:

(Ι) Να βρεθεί το α

(ΙΙ) Να αποδείξετε οτι η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(0,81)$

Αν $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$ θα έχω:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-2x}\overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{2x^2+1}+3\\ \text{Παραγοντοποιώ το τριώνυμο}\\ x^2-2x=x(x-2)}}{=}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}\overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2-3^2}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=}\frac{2x^2+1-9}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\frac{\underbrace{2x^2-8}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το 2}}}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=$$

$$\frac{2(x^2-4)}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}\overset{x^2-4=(x-2)(x+2)}{=}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\frac{2(x+2)}{x\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{x\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}\left(\sqrt{2\cdot 2^2+1}+3\right)}=\frac{4}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ θα έχω:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \overset{f(2)=3\alpha^2-2\alpha+1}{\Leftrightarrow} 3\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\left(3\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) = 3\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$9\alpha^2 - 3\cdot 2\alpha + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(3\alpha)^2 - 2\cdot 3\alpha\cdot 1 + 1^2}_{x^2-2\cdot x\cdot y+y^2=(x-y)^2} = 0 \Leftrightarrow (3a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$(\mathrm{II})\ f(0)\frac{(3a+2)^{2013} + (6a+1)^{2011} + (9a)^{2009}}{(12a-1)^{2009} + (24a-5)^{2007} + \left(9a^2+2\right)^{2005}} =$$

$$= \frac{\left(3\frac{1}{3}+2\right)^{2013} + \left(6\frac{1}{3}+1\right)^{2011} + \left(9\frac{1}{3}\right)^{2009}}{\left(12\frac{1}{3}-1\right)^{2009} + \left(24\frac{1}{3}-5\right)^{2007} + \left[9\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\right]^{2005}} = \frac{3^{2013}+3^{2011}+3^{2009}}{3^{2009}+3^{2007}+3^{2005}} =$$

$$\frac{3^4\cdot 3^{2009}+3^{2009}3^2+3^{2009}}{3^4\cdot 3^{2005}+3^{2005}3^2+3^{2005}} = \frac{81\cdot 3^{2009}+9\cdot 3^{2009}+3^{2009}}{81\cdot 3^{2001}+9\cdot 3^{2001}+3^{2001}} = \frac{91\cdot 3^{2009}}{91\cdot 3^{2005}} = 3^4 = 81$$

Άρα $\mathrm{A}(0,81) \in C_f$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4}}, & x \neq 0 \\ \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-6, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0 = 0$

$\text{Αν } x \neq 0 \; \theta\alpha \; \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$f(x)\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4}} \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση } \sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1} \\ \text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση } \sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)} \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[\left(\sqrt{2x^2+16}\right)^2-\left(2\sqrt{x^2+4}\right)\right]\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)} \overset{\substack{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0 \\ (\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}}{=}$$

$$\frac{\left[x^2+1-\left(2x^2+1\right)\right]\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[2x^2+16-4\left(x^2+4\right)\right]\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\frac{\left(x^2+1-2x^2-1\right)\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(2x^2+16-4x^2-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{-x^2\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{-2x^2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\frac{\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}{2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}{2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\frac{\sqrt{2\cdot 0^2+16}+2\sqrt{0^2+4}}{2\left(\sqrt{0^2+1}+\sqrt{2\cdot 0^2+1}\right)}=\frac{2\cdot 4}{2\cdot 2}=2$$

$\text{Επειδή η συνάτηση } f \text{ είναι συνεχής στο σημείο } x_0=0 \; \theta\alpha \; \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \overset{f(0)=\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-6}{\Leftrightarrow} \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-6=2 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-8=0 \; (1)$$

Αν ρ ακέραια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης (1).Επειδή το ρ είναι ακέραια ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακεραίους συντελεστές θα πρέπει να διαιρεί το σταθερό όρο του πολυωνύμου.Οπότε ρ διαιρεί το -8.Συνεπώς οι πιθανές τιμές του ρ είναι: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Τότε απο το σχήμα του Horner για $\rho=2$ θα έχω:

1	1	-2	-8	$\rho=2$
	$1\cdot 2=2$	$3\cdot 2=6$	$4\cdot 2=8$	
1	$1+2=3$	$-2+6=4$	$-8+8=0$	

$\pi(\alpha)=\alpha^2+3\alpha+4, \upsilon=0$

$$\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-8=(x-\rho)\pi(\alpha)+\upsilon \overset{\substack{\rho=2\\ \pi(\alpha)=\alpha^2+3\alpha+4\\ \upsilon=0}}{=} (\alpha-2)(\alpha^2+3\alpha+4)$$

$$(1)\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-8=0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha^2+3\alpha+4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha-2=0 \\ ή \\ \alpha^2+3\alpha+4=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=2 \\ ή \\ \alpha^2+3\alpha+4=0\,(2) \end{array}\right\}$$

$\alpha^2+3\alpha+4=0\,(2)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot 1\cdot 4=9-16=-7$

Επειδή $\Delta<0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (2) *δεν έχει πραγματικές ρίζες*

Οπότε $\alpha=2$

4.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\eta\mu^2 x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2 x}}{\sqrt{\eta\mu^2 x+1}-\eta\mu x-1}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \alpha^2\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha-\alpha^2-1, & x=0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-\eta\mu x-1}=\frac{\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-(\eta\mu x+1)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)\left[\sqrt{\eta\mu^2x+1}+(\eta\mu x+1)\right]}{\left[\sqrt{\eta\mu^2x+1}-(\eta\mu x+1)\right]\left[\sqrt{\eta\mu^2x+1}+(\eta\mu x+1)\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}\right)^2-\left(2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)^2\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{\left[\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}\right)^2-(\eta\mu x+1)^2\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{\left[\eta\mu^2x+16-4\left(4+\eta\mu^2x\right)\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{\left(\eta\mu^2x+1-\eta\mu^2x-1-2\eta\mu x\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{\left(\eta\mu^2x+16-16-4\eta\mu^2x\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{-2\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{-3\eta\mu^2x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{-2\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=\frac{3\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{2\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu0\left(\sqrt{\eta\mu^20+1}+\eta\mu0+1\right)}{\left(\sqrt{\eta\mu^20+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^20}\right)}=0$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ θα έχω:

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\alpha^2\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha-\alpha^2-1=0\Leftrightarrow\eta\mu\alpha\left(\alpha^2+1\right)-\left(\alpha^2+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha^2+1\right)(\eta\mu\alpha-1)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha^2+1=0\\ \acute{\eta}\\ \eta\mu\alpha-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha^2=-1(\text{Άτοπο})\\ \acute{\eta}\\ \eta\mu\alpha=1\end{matrix}\right\}$$

$$\eta\mu\alpha=\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu x=\eta\mu\theta\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=2\kappa\pi+\theta,\kappa\in\mathbb{Z}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi+(\pi-\theta),\kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi+\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right),\kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

$$\text{Η συνάρτηση } f=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}, x\in(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)\\ \alpha-\dfrac{\beta}{3}, x=2\\ \alpha+\beta, x=3\end{cases}$$

Να βρεθούν τα α,β όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0=2$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(3,2)$

2.

$$\text{Η συνάρτηση } f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{8x^2+1}-3}{x^2-x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)\\ 3\alpha^2-4\alpha+4, x=1\\ \dfrac{(3a)^{3121}+(6a-2)^{3119}+(9a-4)^{3117}}{(12a-6)^{3117}+(15a-8)^{3115}+(9a^2-2)^{3113}}, x=0\end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$ τότε:

(I) Να βρεθεί το α

(II) Να αποδείξετε οτι η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(0,16)$

3.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{5x^2+81}-3\sqrt{x^2+9}}, x\neq 0\\ \alpha^3+\alpha^2+\dfrac{1}{4}, x=0\end{cases}$$

Να βρεθεί το α όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0=0$

4.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\eta\mu^2 x+64}-2\sqrt{16+\eta\mu^2 x}}{\sqrt{\eta\mu^2 x+4}-\eta\mu x-2}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \alpha^4\eta\mu\alpha-\eta\mu\alpha-3\alpha^4+3, x=0\end{cases}$$

Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$