ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

(Ι) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ δεν έπεται οτι υπάρχουν τα όρια της f στο σημείο x_0 και της g στο σημείο x_0

Πράγματι:

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=\eta\mu\frac{1}{x}, x\neq 0$

Θεωρώ τους αριθμούς $x_\nu=\frac{1}{2\pi\nu}, \nu\in\mathbb{N}^*$. Τότε θα έχω:

$$g(x_\nu)=h\left(\frac{1}{2\pi\nu}\right)=\eta\mu\frac{1}{\frac{1}{2\pi\nu}}=\eta\mu 2\pi\nu=\eta\mu(2\pi\nu+0)\overset{\eta\mu(2\pi\kappa+\theta)=\eta\mu\theta,\kappa\in\mathbb{Z}}{=}\eta\mu 0=0$$

Οπότε αν το ν είναι πολύ μεγάλο το x_ν τότε το x_ν είναι περίπου 0 δηλαδή το x_ν τείνει στο 0. Τότε θα ισχύει $g(x_\nu)=0$

Θεωρώ τους αριθμούς $y_\nu=\frac{1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{2}}, \nu\in\mathbb{N}^*$. Τότε θα έχω:

$$g(y_\nu)=h\left(\frac{1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{2}}\right)=\eta\mu\frac{1}{\frac{1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{2}}}=\eta\mu\left(2\pi\nu++\frac{\pi}{2}\right)\overset{\eta\mu(2\pi\kappa+\theta)=\eta\mu\theta,\kappa\in\mathbb{Z}}{=}\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$$

Οπότε αν το ν είναι πολύ μεγάλο το y_ν τότε το y_ν είναι περίπου 0 δηλαδή το y_ν τείνει στο 0. Τότε θα ισχύει $g(y_\nu)=1$

Για να υπάρχει το όριο της συνάρτησης g στο σημείο $x_0=0$ θα πρέπει όταν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης να τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό!!!

Όταν το x εχει την μορφή $\frac{1}{2\pi\nu}, \nu\in\mathbb{N}^*$ βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης παίρνουν την τιμή 0.

Όταν το x εχει την μορφή $\frac{1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{2}}, \nu\in\mathbb{N}^*$ βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης παίρνουν την τιμή 1.

Συνεπώς όταν το x τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης δεν τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό. Οπότε δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης g στο σημείο $x_0=0$

$Θεωρώ\ την\ συνάρτηση\ f(x)=x-ημ\frac{1}{x}, x\neq 0.$ $Έστω\ υπάρχει\ το\ όριο\ της$

$συνάρτησης\ f\ στο\ σημείο\ x_0=0.$ $Τότε\ αν\ x\neq 0\ θα\ έχω:$

$$f(x)=x-ημ\frac{1}{x}\Leftrightarrow ημ\frac{1}{x}=x-f(x)$$

$Επειδή\ \lim\limits_{x\to 0}x=0\ και\ υπάρχει\ το\ όριο\ της\ f\ στο\ σημείο\ x_0=0\ θα\ υπάρχει\ και$

$το\ όριο\ της\ συνάρτησης\ ημ\frac{1}{x}=x-f(x)\ στο\ σημείο\ x_0=0\,(Άτοπο)$

$Συνεπώς\ δεν\ υπάρχει\ το\ όριο\ της\ συνάρτησης\ f\ στο\ σημείο\ x_0=0$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(x-\cancel{ημ\frac{1}{x}}+\cancel{ημ\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}x=0$$

$Οπότε\ υπάρχει\ το\ \lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]\ χωρίς\ να\ υπάρχουν\ υπάρχουν\ τα\ όρια$

$της\ f\ στο\ σημείο\ x_0=0\ και\ της\ g\ στο\ σημείο\ x_0=0$

$\underline{(\mathrm{II})\ Αν\ υπάρχει\ το\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)\ δεν\ έπεται\ οτι\ υπάρχουν\ τα\ όρια}$

$\underline{της\ f\ στο\ σημείο\ x_0\ και\ της\ g\ στο\ σημείο\ x_0}$

$$Θεωρώ\ της\ συναρτήσεις\ f(x)=\begin{cases}-5, x\leq 0\\ 2, x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-2, x\leq 0\\ 5, x>0\end{cases}$$

$$Τότε\ θα\ έχω: f(x)g(x)=\begin{cases}-5(-2), x\leq 0\\ 2\cdot 5, x>0\end{cases}=\begin{cases}10, x\leq 0\\ 10, x>0\end{cases}=10$$

$Οπότε: \lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}10=10$

$Όταν\ το\ x\ τείνει\ στο\ μηδέν\ απο\ τιμές\ μικρότερες\ του\ 0\ οι\ αντίστοιχες$
$τιμές\ της\ συνάρτησης\ f\ τείνουν\ στο\ -5,\ ενώ\ όταν\ x\ τείνει\ στο\ μηδέν\ απο$
$τιμές\ μεγαλύτερες\ του\ 0\ οι\ αντίστοιχες\ τιμές\ της\ συνάρτησης\ f\ τείνουν$
$στο\ 2.$ $Για\ να\ υπάρχει\ το\ όριο\ της\ συνάρτησης\ f\ στο\ σημείο\ x_0=0$
$θα\ πρέπει\ όταν\ το\ x\ τείνει\ στο\ μηδέν(ανέξάρτητα\ αν\ αυτές\ οι\ τιμές$
$μεγαλυτερες\ ή\ μικρότερες\ απο\ το\ 0\ αρκεί\ να\ βρίκονται\ πολύ\ κοντά\ στο\ 0)$
$θα\ πρέπει\ οι\ τιμές\ της\ συνάρτησης\ να\ τείνουν\ στον\ ίδιο\ πάντα\ αριθμό$
$Άρα\ δεν\ υπάρχει\ το\ όριο\ της\ f\ στο\ σημείο\ x_0=0$

$Όταν\ το\ x\ τείνει\ στο\ μηδέν\ απο\ τιμές\ μικρότερες\ του\ 0\ οι\ αντίστοιχες$
$τιμές\ της\ συνάρτησης\ g\ τείνουν\ στο\ -2,\ ενώ\ όταν\ x\ τείνει\ στο\ μηδέν\ απο$
$τιμές\ μεγαλύτερες\ του\ 0\ οι\ αντίστοιχες\ τιμές\ της\ συνάρτησης\ f\ τείνουν$
$στο\ 5.$ $Για\ να\ υπάρχει\ το\ όριο\ της\ συνάρτησης\ g\ στο\ σημείο\ x_0=0$
$θα\ πρέπει\ όταν\ το\ x\ τείνει\ στο\ μηδέν(ανέξάρτητα\ αν\ αυτές\ οι\ τιμές$
$μεγαλυτερες\ ή\ μικρότερες\ απο\ το\ 0\ αρκεί\ να\ βρίκονται\ πολύ\ κοντά\ στο\ 0)$
$θα\ πρέπει\ οι\ τιμές\ της\ συνάρτησης\ να\ τείνουν\ στον\ ίδιο\ πάντα\ αριθμό$
$Άρα\ δεν\ υπάρχει\ το\ όριο\ της\ g\ στο\ σημείο\ x_0=0$

$Οπότε\ υπάρχει\ το\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)\ χωρίς\ να\ υπάρχουν\ τα\ όρια\ της\ f\ στο\ σημείο$
$x_0=0\ και\ της\ g\ στο\ σημείο\ x_0=0$