ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω η συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ $\left(D_f : \text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ και $x_0 \in D_f$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός

τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

$f'\left(x_0\right)$: Η παράγωγος της f στο σημείο x_0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=3$ με $f'(3)=1$

να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h+9}-3}{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=3$ θα ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}=f'(3)=1$$

$$\frac{\sqrt{h+9}-3}{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}=\frac{\left(\sqrt{h+9}-3\right)\left(\sqrt{h+9}+3\right)}{\left[f\left(3+h\right)-f\left(3\right)\right]\left(\sqrt{h+9}+3\right)}\overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{h+9}\right)^2-3^2}{\left[f\left(3+h\right)-f\left(3\right)\right]\left(\sqrt{h+9}+3\right)}=\frac{h+\cancel{9}-\cancel{9}}{\left[f\left(3+h\right)-f\left(3\right)\right]\left(\sqrt{h+9}+3\right)}\overset{\text{Διαιρώ τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το } h}{=}$$

$$=\frac{\dfrac{h}{h}}{\dfrac{\left[f\left(3+h\right)-f\left(3\right)\right]\left(\sqrt{h+9}+3\right)}{h}}=\frac{1}{\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}\left(\sqrt{h+9}+3\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+9}-3}{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}\left(\sqrt{h+9}+3\right)}=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}\left(\sqrt{h+9}+3\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}\lim\limits_{h\to 0}\left(\sqrt{h+9}+3\right)}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{9}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ με $f'(1)=2$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(h+5)^2-25}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ θα ισχύει:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(h+5)^2-25}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h^2+2\cdot h\cdot5+5^2-25}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h^2+10h+\cancel{25}-\cancel{25}}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h^2+10h}=$$

$$=\frac{f(1+h)-f(1)}{h(h+10)}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\frac{1}{h+10}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(h+5)^2-25}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\frac{1}{h+10}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\lim_{h\to0}\frac{1}{h+10}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{10}=\frac{2:2}{10:2}=\frac{1}{5}$$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=5$ με $f'(5)=8$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{(h+1)^3-1}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=5$ θα ισχύει:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=f'(5)=8$$

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{(h+1)^3-1}\overset{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\alpha\cdot\beta^2+\beta^3}{=}\frac{f(5+h)-f(5)}{h^3+3\cdot h^2\cdot1+3\cdot h\cdot1^2+1^3}=$$

$$=\frac{f(5+h)-f(5)}{h^3+3h^2+3h+\cancel{1}-\cancel{1}}=\frac{f(5+h)-f(5)}{h\left(h^2+3h+3\right)}=\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\frac{1}{h^2+3h+3}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{(h+1)^3-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\frac{1}{h^2+3h+3}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2+3h+3}=8\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ με $f'(1)=1$ να βρεθεί το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ θα ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1$$

$$\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}\overset{\text{Προσθαφαιρώ το } f(1)}{=}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}=$$

$$2\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{2h}=2\left(\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\frac{f(1)-f(1-2h)}{2h}\right)=$$

$$2\left[\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\frac{-\left(f(1-2h)-f(1)\right)}{2h}\right]=$$

$$2\left[\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\frac{\left(f(1-2h)-f(1)\right)}{-2h}\right]$$

Θέτω: $w=2h$

Έχω: $h\to 0\Rightarrow w\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\overset{\substack{w=2h\\ w\to 0}}{=}\lim_{w\to 0}\frac{f(1+w)-f(1)}{w}=f'(1)=1$$

Θέτω: $t=-2h$

Έχω: $h\to 0\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\overset{\substack{t=-2h\\ t\to 0}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=f'(1)=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}=2\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\frac{\left(f(1-2h)-f(1)\right)}{-2h}\right]=$$

$$2\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(1-2h)-f(1)\right)}{-2h}\right]=2(1+1)=4$$

5.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$ και ισχύει

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h}=5$. Να βρεθούν:

(I) Η τιμή $f(2)$

(II) Η παράγωγος της f στο σημείο $x_0=2$

(III) Το όριο $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

(I) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(2)$$

(II) Θέτω: $t=2+h$

Έχω: $t=2+h\Leftrightarrow h=t-2$

Έχω: $h\to 0\Rightarrow t\to 2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=5\overset{\substack{t=2+h\\ h=t-2\\ t\to 2}}{\Longrightarrow}\lim_{t\to 2}\frac{f(t)}{t-2}=5$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(t)=\dfrac{f(t)}{t-2},t\neq 2$

Τότε θα έχω: $\lim\limits_{t\to 2}g(t)=5$

$$\left\{\begin{aligned}&g(t)=\frac{f(t)}{t-2}\\&t\neq 2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&f(t)=g(t)(t-2)\\&t\neq 2\end{aligned}\right\}$$

Οπότε: $\lim\limits_{t\to 2}f(t)=\lim\limits_{t\to 2}g(t)(t-2)=\lim\limits_{t\to 2}g(t)\lim\limits_{t\to 2}(t-2)=5\cdot 0=0$

Έχω: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=5\overset{f(2)=0}{\Longrightarrow}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=5$$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=2$ και ισχύει

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=5$$

$$(\mathrm{III})\ \frac{f(x)+\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}\overset{f(x)=g(x)(x-2)}{=}\frac{g(x)(x-2)+\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}}{x^2-2^2}=$$

$$\frac{g(x)(x-2)+\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-3^2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{(x-2)(x+2)}=\frac{g(x)(x-2)+\dfrac{\underbrace{x^2-4}_{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x^2+5}+3}}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\frac{g(x)(x-2)+\dfrac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}}{(x-2)(x+2)}=\frac{\cancel{(x-2)}\left(g(x)+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{g(x)+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{x+2}$$

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}g(x)+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=$$

$$=\frac{5+\dfrac{4}{6}}{4}=\frac{5+\dfrac{2}{3}}{4}=\frac{\dfrac{15}{3}+\dfrac{2}{3}}{4}=\frac{\dfrac{17}{3}}{4}=\frac{17}{12}$$

6.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=4$ με $f'(4)\neq 0$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+3h)-f(4-2h)}{f(4+5h)-f(4-4h)}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=4$ θα ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$$

$$\frac{f(4+3h)-f(4-2h)}{f(4+5h)-f(4-4h)} \overset{\Pi\rho o\sigma\theta\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \tau o\ f(4)}{=} \frac{f(4+3h)-f(4)+f(4)-f(4-2h)}{f(4+5h)-f(4)+f(4)-f(4-4h)} =$$

$$= \frac{f(4+3h)-f(4)+\underbrace{f(4)-f(4-2h)}_{-\left[f(4-2h)-f(4)\right]}}{f(4+5h)-f(4)+\underbrace{f(4)-f(4-4h)}_{-\left[f(4-4h)-f(4)\right]}} =$$

$$\frac{f(4+3h)-f(4)-\left[f(4-2h)-f(4)\right]}{f(4+5h)-f(4)-\left[f(4-4h)-f(4)\right]} \overset{\Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \tau o\nu\ \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\nu\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\ \mu\varepsilon\ \tau o\ h}{=}$$

$$\frac{\dfrac{f(4+3h)-f(4)-\left[f(4-2h)-f(4)\right]}{h}}{\dfrac{f(4+5h)-f(4)-\left[f(4-4h)-f(4)\right]}{h}} =$$

$$\frac{\dfrac{f(4+3h)-f(4)}{h}+\dfrac{-\left[f(4-2h)-f(4)\right]}{h}}{\dfrac{f(4+5h)-f(4)}{h}+\dfrac{-\left[f(4-4h)-f(4)\right]}{h}} =$$

$$\frac{\dfrac{f(4+3h)-f(4)}{h}+\dfrac{f(4-2h)-f(4)}{-h}}{\dfrac{f(4+5h)-f(4)}{h}+\dfrac{f(4-4h)-f(4)}{-h}} =$$

$$\frac{3\dfrac{f(4+3h)-f(4)}{3h}+2\dfrac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}}{5\dfrac{f(4+5h)-f(4)}{5h}+4\dfrac{f(4-4h)-f(4)}{-4h}}$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : t = 3h$

$\acute{E}\chi\omega : h \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4)}{3h} \overset{\substack{t=3h\\ t\to 0}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f(4+t)-f(4)}{t} = f'(4)$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : w = -2h$

$\acute{E}\chi\omega : h \to 0 \Rightarrow w \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4-2h)-f(4)}{-2h} \overset{\substack{w=-2h\\ w\to 0}}{=} \lim_{w\to 0}\frac{f(4+w)-f(4)}{w} = f'(4)$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : r = 5h$

$\acute{E}\chi\omega : h \to 0 \Rightarrow r \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+5h)-f(4)}{5h} \overset{\substack{r=5h\\ r\to 0}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{f(4+r)-f(4)}{r} = f'(4)$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : s = -4h$

$\acute{E}\chi\omega : h \to 0 \Rightarrow s \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4-4h)-f(4)}{-4h} \overset{\substack{s=-4h\\ s\to 0}}{=} \lim_{s\to 0}\frac{f(4+s)-f(4)}{s} = f'(4)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4-2h)}{f(4+5h)-f(4-4h)} = \lim_{h\to 0}\frac{3\dfrac{f(4+3h)-f(4)}{3h}+2\dfrac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}}{5\dfrac{f(4+5h)-f(4)}{5h}+4\dfrac{f(4-4h)-f(4)}{-4h}} =$$

$$\frac{3\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+3h)-f(4)}{3h}+2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}}{5\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+5h)-f(4)}{5h}+4\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4-4h)-f(4)}{-4h}} =$$

$$\frac{3\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+3h)-f(4)}{3h}}_{f'(4)}+2\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}}_{f'(4)}}{5\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+5h)-f(4)}{5h}}_{f'(4)}+4\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4-4h)-f(4)}{-4h}}_{f'(4)}} = \frac{3f'(4)+2f'(4)}{5f'(4)+4f'(4)} =$$

$$= \frac{5\cancel{f'(4)}}{9\cancel{f'(4)}} = \frac{5}{9}$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 1$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h+4}-2}{f(2+h)-f(2)}$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 5$ με $f'(5) = 3$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{(h+4)^2-16}$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 8$ με $f'(8) = 5$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(8+h)-f(8)}{(h+2)^3-8}$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 5$ με $f'(5) = 1$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+3h)-f(5-4h)}{h}$

5.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{h} = 2$. Να βρεθούν:

(I) Η τιμή $f(1)$

(II) Η παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = 1$

(III) Το όριο $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\sqrt{2x^2+7}-3}{x^2-1}$

6.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ με $f'(2) \neq 0$ να αποδείξετε οτι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+7h)-f(2-3h)}{f(2+6h)-f(2-4h)} = 1$

7.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) \neq 0$ να αποδείξετε οτι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-\theta^2 h)}{f(1+\theta^4 h)-f(1-\theta^2 h)} = \dfrac{1}{\theta^2}, \theta \neq 0$