

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x), \lambda : \text{σταθερά}$
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
$(c)' = 0, c : \text{σταθερά}$
$(x)' = 1$
$(x^a)' = ax^{a-1}$
$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$(f^a)' = a f^{a-1} f'$

$(e^f)' = e^f \cdot f'$
$(\ln f)' = \frac{f'}{f}, f > 0$
$(\ln f)' = \frac{f'}{f}, f \neq 0$
$(\eta\mu f)' = \sigma\upsilon\nu f \cdot f'$
$(\sigma\upsilon\nu f)' = -\eta\mu f \cdot f'$
$(\varepsilon\varphi f)' = \frac{f'}{\sigma\upsilon\nu^2 f}, f \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$(\sigma\varphi f)' = -\frac{f'}{\eta\mu^2 f}, f \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$
$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}, a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{Z}^*$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}, x \in (0,8)$$

Να βρεθεί η παράγωγος της f

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = x^{\frac{1}{2}} + (8-x)^{\frac{1}{2}}, x \in (0,8)$$

$$f(x) = \left[x^{\frac{1}{2}} + (8-x)^{\frac{1}{2}} \right]' \stackrel{(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x)}{=} \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' + \left[(8-x)^{\frac{1}{2}} \right]' =$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Για να παραγωγίσω την
συνάρτηση $(8-x)^{\frac{1}{2}}$ την
παραγωγίζω όπως θα παραγώγιζα
την $x^{\frac{1}{2}}$ (απλά στην θέση του x έχω
το $8-x$) και την πολλαπλασιάζω με
την παράγωγο του $8-x$

$$\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}, \alpha \neq 0$$

(c)'=0, c: Σ ταθερά

$$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{2}(8-x)^{\frac{1}{2}-1}(8-x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(8-x)^{-\frac{1}{2}} \left[(8)' - (x)' \right] \stackrel{(x)'}{=} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{1}{(8-x)^{\frac{1}{2}}} (0-1) \stackrel{\frac{\mu}{a^v} = \sqrt[\mu]{a^v}, \alpha > 0, \mu, v \in \mathbb{Q}^*}{=} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

2.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} να βρείτε την $g'(0)$ όταν:

$$g(x) = x^2 f(x) + x$$

$$g'(x) = [x^2 f(x) + x]' \stackrel{(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x)}{=} = (x^2 f(x))' + (x)' \stackrel{(F(x)G(x))' = F'(x)G(x)+F(x)G'(x)}{=} =$$

$$(x^2)' f(x) + x^2 f'(x) + 1 = 2xf(x) + x^2 f'(x) + 1$$

$$\text{Οπότε: } g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) + 1, x \in \mathbb{R}$$

Αν $x = 0$ θα έχω:

$$g'(x) = 2 \cdot 0 \cdot f(x) + 0^2 \cdot f'(0) + 1 = 1$$

3.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ικανοποιεί την σχέση:

$$f(x^4) = x^5$$

Τότε η $f'(1)$ είναι:

$$(A) 0 \quad (B) 5 \quad (\Gamma) -7 \quad (\Delta) \frac{5}{4}$$

$(x^a)' = ax^{a-1}$
 Για να παραγωγίσω την
 συνάρτηση $f(x^4)$ την
 παραγωγίζω όπως θα παραγώγιζα
 την $f(x)$ (απλά στην θέση του x έχω
 το x^4) και την πολλαπλασιάζω με
 την παράγωγο του x^4

$$f(x^4) = x^5 \Rightarrow [f(x^4)]' = (x^5)' \Rightarrow$$

$$f'(x^4)(x^4)' = 5x^4 \Rightarrow 4x^3 f'(x^4) = 5x^4$$

Οπότε : $4x^3 f'(x^4) = 5x^4, x \in \mathbb{R}$

Αν $x=1$ θα έχω :

$$4 \cdot 1^3 f'(1^4) = 5 \cdot 1^4 \Leftrightarrow 4f'(1) = 5 \Leftrightarrow f'(1) = \frac{5}{4}$$

Άρα επιλέγω το (Δ)

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{2x}(\alpha + \beta x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι :

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

$$f'(x) = \left[e^{2x}(\alpha + \beta x) \right]' \stackrel{(F(x)G(x))' = F(x)'G(x) + F(x)G'(x)}{=} (e^{2x})'(\alpha + \beta x) + e^{2x}(\alpha + \beta x)'$$

$$(e^F)' = e^F \cdot F'$$

Για να παραγωγίσω την συνάρτηση e^{2x} την παραγωγίζω όπως θα παραγώγιζα την e^x (απλά στην θέση του x έχω το $2x$) και την πολλαπλασιάζω με την παράγωγο του $2x$

$$(cF)' = cF', c: \text{σταθερά}$$

$$(c)' = 0, c: \text{σταθερά}$$

$$= e^{2x}(2x)'(\alpha + \beta x) + e^{2x}[(\alpha)' + (\beta x)'] \stackrel{(x)' = 1}{=} =$$

$$2e^{2x}(\alpha + \beta x) + \beta e^{2x} \stackrel{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } e^{2x}}{=} e^{2x}[2(\alpha + \beta x) + \beta] = e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x)$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left[e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x) \right]' \stackrel{(F(x)G(x))' = F(x)'G(x) + F(x)G'(x)}{=} =$$

$$(e^F)' = e^F \cdot F'$$

Για να παραγωγίσω την συνάρτηση e^{2x} την παραγωγίζω όπως θα παραγώγιζα την e^x (απλά στην θέση του x έχω το $2x$) και την πολλαπλασιάζω με την παράγωγο του $2x$

$$(e^{2x})'(2\alpha + \beta + 2\beta x) + e^{2x}[(2\alpha + \beta)' + (2\beta x)'] =$$

$$e^{2x}(2x)'(2\alpha + \beta + 2\beta x) + e^{2x}[(2\alpha + \beta)' + (2\beta x)'] =$$

$$2e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x) + 2\beta e^{2x} \stackrel{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } 2e^{2x}}{=} 2e^{2x}(2\alpha + \beta + 2\beta x + \beta) =$$

$$= 2e^{2x} (2\alpha + 2\beta + 2\beta x) = 2e^{2x} \cdot 2(\alpha + \beta + \beta x) = 4e^{2x} (\alpha + \beta + \beta x)$$

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \stackrel{f(x)=e^{2x}(\alpha+\beta x), f'(x)=e^{2x}(2\alpha+\beta+2\beta x), f''(x)=4e^{2x}(\alpha+\beta+\beta x)}{=} =$$

$$4e^{2x} (\alpha + \beta + \beta x) - 4e^{2x} (2\alpha + \beta + 2\beta x) + 4e^{2x} (\alpha + \beta x) \stackrel{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } 4e^{2x}}{=} =$$

$$4e^{2x} [\alpha + \beta + \beta x - (2\alpha + \beta + 2\beta x) + \alpha + \beta x] =$$

$$4e^{2x} (\alpha + \beta + \beta x - 2\alpha - \beta - 2\beta x + \alpha + \beta x) = 4e^{2x} \cdot 0 = 0$$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 5$

Να λυθεί η εξίσωση $f'(x) = 0$

$$f'(x) = (3x^4 - 6x^2 + 5)' \stackrel{(F(x)+G(x)+H(x))' = F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} = (3x^4)' + (-6x^2)' + (5)'$$

$$(cF(x))' = cF'(x), c: \Sigma \text{ταθερά}$$

$$(c)' = 0, c: \Sigma \text{ταθερά}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(c)' = 0, c: \Sigma \text{ταθερά}$$

$$= 3(4x^3) - 6(2x) + 0 = 12x^3 - 12x = 12x(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dot{\eta} \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dot{\eta} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dot{\eta} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

6.

Αν $y = \ln \frac{1}{1+x}$, $x > -1$ να αποδειχθεί ότι:

$$xy' + 1 = e^y$$

$$y = \ln \frac{1}{1+x} \stackrel{a^{-1} = \frac{1}{a}, a \neq 0}{=} = \ln(1+x)^{-1} \stackrel{\ln \theta^k = k \ln \theta, \theta > 0}{=} = -\ln(1+x)$$

$$(\ln F)' = \frac{F'}{F}, F > 0$$

Για να παραγωγίσω την συνάρτηση $\ln(1+x)$ την παραγωγίζω όπως θα παραγώγιζα την $\ln x$ (απλά στην θέση του x έχω το $x+1$) και την πολλαπλασιάζω με την παράγωγο του $x+1$

$$y' = (-\ln(1+x))' \stackrel{(cF(x))' = cF'(x), c: \text{σταθερά}}{=} -(\ln(1+x))' = -\frac{(1+x)'}{1+x} = -\frac{1}{x+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy' + 1 = x \left(-\frac{1}{x+1} \right) + 1 = -\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \\ e^y = e^{\ln \frac{1}{1+x}} = e^{\ln \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x} \end{array} \right\} \Rightarrow xy' + 1 = e^y$$

7.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \square \rightarrow \square, g: \square \rightarrow \square$ παραγωγίσιμες στο \square και ισχύει:

$$f(3) = 2, g(x) = (x-4)(f(x)-2)$$

Να αποδειχθεί ότι: $f'(3) + g'(3) = 0$

$$g'(x) = [(x-4)(f(x)-2)]' \stackrel{(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)}{=} (x-4)'(f(x)-2) + (x-4)(f(x)-2)'$$

$$(x-4)'(f(x)-2) + (x-4)(f(x)-2)' \stackrel{(F(x)-G(x))' = F'(x)-G'(x)}{=} [(x)' - (4)'](f(x)-2) + (x-4)[f'(x) - (2)']$$

$$= f(x) - 2 + (x-4)f'(x)$$

$$\text{Οπότε: } g'(x) = f(x) + (x-4)f'(x) - 2 \quad (1)$$

Θέτω $x = 3$ στην σχέση (1):

$$g'(3) = f(3) + (3-4)f'(3) - 2 \stackrel{f(3)=2}{\Leftrightarrow} g'(3) = 2 - f'(3) - 2 \Leftrightarrow f'(3) + g'(3) = 0$$

8.

Αν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu^2 x}$ να αποδείξετε ότι:

$$3 - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 17f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sigma \nu^2 x}{1 + \eta \mu^2 x} \right)' \stackrel{\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}, G \neq 0}{=} \frac{(\sigma \nu^2 x)' (1 + \eta \mu^2 x) - \sigma \nu^2 x (1 + \eta \mu^2 x)'}{(1 + \eta \mu^2 x)^2}$$

$$(F^a)' = a \square F^{a-1} \square F'$$

Για να παραγωγίσω την

συνάρτηση $\sigma \nu^2 x$ την

παραγωγίζω όπως θα παραγωγίζα

την x^2 (αλλά στην θέση του x έχω

το $\sigma \nu x$) και την πολλαπλασιάζω με

την παράγωγο του $\sigma \nu x$

$$= \frac{2\sigma \nu x (\sigma \nu x)' (1 + \eta \mu^2 x) - \sigma \nu^2 x \left[(1)' + (\eta \mu^2 x)' \right]}{(1 + \eta \mu^2 x)^2} =$$

$$(F^a)' = a \square F^{a-1} \square F'$$

Για να παραγωγίσω την

συνάρτηση $\eta \mu^2 x$ την

παραγωγίζω όπως θα παραγωγίζα

την x^2 (αλλά στην θέση του x έχω

το $\eta \mu x$) και την πολλαπλασιάζω με

την παράγωγο του $\eta \mu x$

$$= \frac{2\sigma \nu x (-\eta \mu x) (1 + \eta \mu^2 x) - 2\eta \mu x (\eta \mu x)' \sigma \nu^2 x}{(1 + \eta \mu^2 x)^2} =$$

$$\frac{-2\eta \mu x \sigma \nu x (1 + \eta \mu^2 x) - 2\eta \mu x \sigma \nu x \sigma \nu^2 x}{(1 + \eta \mu^2 x)^2} \stackrel{\eta \mu 2x = 2\eta \mu x \sigma \nu x}{=} =$$

$$\frac{-\eta \mu 2x (1 + \eta \mu^2 x) - \eta \mu 2x \sigma \nu^2 x}{(1 + \eta \mu^2 x)^2} = \frac{-\eta \mu 2x (1 + \eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x)}{(1 + \eta \mu^2 x)^2} \stackrel{\eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x = 1}{=} =$$

$$\frac{-\eta \mu 2x (1 + 1)}{(1 + \eta \mu^2 x)^2} = \frac{-2\eta \mu 2x}{(1 + \eta \mu^2 x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2\eta \mu \frac{2\pi}{4}}{\left(1 + \eta \mu^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{-2\eta \mu \frac{\pi}{2}}{\left(1 + \eta \mu^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} \stackrel{\eta \mu \frac{\pi}{2} = 1}{=} \stackrel{\eta \mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}{=} = \frac{-2 \square 1}{\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^2} = \frac{-2}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = -\frac{8}{9}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sigma \nu^2 \frac{\pi}{4}}{1 + \eta \mu^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma \nu \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}}{\eta \mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$3 - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{9}}{=} 3 - 3\left(-\frac{8}{9}\right) = 3 + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} + \frac{8}{3} = \frac{17}{3} = 17 \frac{1}{3} \stackrel{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}}{=} 17f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9-x}$, $x \in (0,9)$

Να βρεθεί η παράγωγος της f

2.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} να βρείτε την $g'(0)$ όταν $g(x) = x^2 f(x^3) + 2x$

3.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ικανοποιεί την σχέση $f(x^5) = x^6$. Τότε η $f'(1)$ είναι:

(Α) 0 (Β) 9 (Γ) -13 (Δ) $\frac{6}{5}$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x}(\alpha + \beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 13$

Να λυθεί η εξίσωση $f'(x) = 0$

6.

Αν $y = -\ln \frac{1}{1+x}$, $x > -1$ να αποδειχθεί ότι $-xy' + 1 = e^{-y}$

7.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο \mathbb{R}

και ισχύει $f(21) = 5$, $g(x) = (x-22)(f(x)-5)$. Να αποδειχθεί ότι:

$f'(21) + g'(21) = 0$

8.

Αν $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{3 + \sigma\upsilon\nu^2 x}$ να αποδείξετε ότι:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{23}{49}$$