Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f

Αν η συνάρτηση $f: D_f \to \mathbb{R}$ $\left(D_f:\text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in D_f$ υπάρχει εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $(\varepsilon) \nparallel y'y$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι ίσος με την παράγωγο της f στο σημείο x_0

Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0

(ε): Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

$(\varepsilon) \nparallel y'y$

λ: Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε)

$\lambda = f'\left(x_0\right)$

ΜΙΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΣΧΕΣΗ

Αν η ευθεία (ε) με $(\varepsilon) \nparallel y'y$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τότε η εξίσωση της (ε) θα έχει την μορφή:

$y = \lambda x + \kappa$

Πως θα βρώ την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ όταν η $f: D_f \to \mathbb{R}$ $\left(D_f:\text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in D_f$

↓

Επειδή η συνάρτηση $f: D_f \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in D_f$ υπάρχει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $(\varepsilon) \nparallel y'y$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της (ε) θα είναι $\lambda = f'\left(x_0\right)$

↓

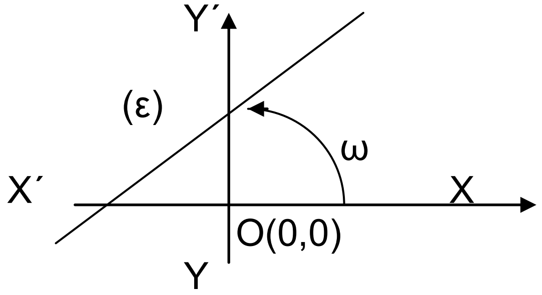
Τότε η εξίσωση της ευθείας (ε) θα έχει την μορφή:

$$y = \lambda x + \kappa \overset{\lambda = f'(x_0)}{\Longleftrightarrow} y = f'\left(x_0\right)x + \kappa$$

$(\varepsilon): y = f'\left(x_0\right)x + \kappa$

$\text{Επειδή } A\left(x_0 f\left(x_0\right)\right) \in (\varepsilon)$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της της ευθεία* (ε). *Οπότε θέτω όπου* $x = x_0,\ y = f\left(x_0\right)$ *στην εξίσωση* $y = f'\left(x_0\right)x + \kappa$

$$A\left(x_0 f\left(x_0\right)\right) \in (\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=f'(x_0)x+\kappa}{\Longleftrightarrow} f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)x_0 + \kappa \Leftrightarrow \text{Προσδιορίζω την σταθερά } \kappa$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)	
Πότε ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε)	Όταν (ε) δεν είναι παράλληλη με τον άξονα Y΄Y
Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)	 λ = εφω λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) ω = Η γωνία που διαγράφει ο άξονας X΄X όταν στραφεί αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού έτσι ώστε να συναντήσει την ευθεία (ε)
Συνθήκη παραλληλίας	$(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ λ_1 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_1) λ_2 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2)
Συνθήκη καθετότητας	$(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Longleftrightarrow \lambda_1 \bullet \lambda_2 = -1$ λ_1 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθεία (ε_1) λ_2 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2)
Απο ποια σχέση δίνεται ο συντελεστής διευθυνσης της ευθείας (ε) όταν ευθεία (ε) έχει εξίσωση (ε) : y = α x + β	(ε) : y = α x + β λ = α = Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2x + 5$ *στο σημείο* $x_0 = 0$

$$f'(x)=\left(x^2+2x+5\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} \left(x^2\right)'+\left(2x\right)'+\left(5\right)' \overset{\substack{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}\\ \left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ \left(c\right)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}$$

$$=2x+2\left(x\right)'+0 \overset{\left(x\right)'=1}{=} 2x+2\cdot 1=2x+2$$

$f'(x)=2x+2$

$f'(0)=2\cdot 0+2=2$

Επειδή η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ υπάρχει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $A\left(0,f(0)\right)$ με $(\varepsilon)\not\parallel y'y$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της (ε) θα είναι $\lambda=f'(x_0)=f'(0)=2$

Η εξίσωση της ευθείας (ε) θα έχει την μορφή:

$$y=\lambda x+\kappa \overset{\lambda=2}{\Longleftrightarrow} y=2x+\kappa$$

$(\varepsilon): y=2x+\kappa$

$f(0)=0^2+2\cdot 0+5=5$

$$A\left(0,f(0)\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow A(0,5)\in(\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=2x+\kappa}{\Longleftrightarrow} 5=2\cdot 0+\kappa\Leftrightarrow\kappa=2$$

Τότε η εξίσωση της ευθείας (ε) θα είναι:

$$y=2x+\kappa \overset{\kappa=2}{\Longleftrightarrow} y=2x+2$$

2.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ στο σημείο επαφής $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ όταν ισχύει $f'(x_0)=2f(x_0)$

$$f'(x)=\left[\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right]' \overset{\left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=} \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)' = \overset{\left(F(x)-G(x)\right)'=F'(x)-G'(x)}{=}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(e^x\right)'-\left(e^{-x}\right)'\right] \overset{\substack{\left(e^x\right)'=e^x\\ \left(e^{F(x)}\right)'=e^{F(x)}F'(x)}}{=} \frac{1}{2}\left[e^x-\left(e^{-x}\right)\left(-x\right)'\right]=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, x\in\mathbb{R}$

$$f'(x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow \frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=\cancel{2}\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{\cancel{2}}\Leftrightarrow \frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=e^{x_0}-e^{-x_0}\Leftrightarrow$$

$$e^{x_0}+e^{-x_0}=2\left(e^{x_0}-e^{-x_0}\right)\Leftrightarrow e^{x_0}+e^{-x_0}=2e^{x_0}-2e^{-x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}-2e^{x_0}=-2e^{-x_0}-e^{-x_0}\Leftrightarrow$$

$$e^{x_0}=3e^{-x_0}\overset{\alpha^{-x}=\frac{1}{\alpha^x},\alpha\neq 0}{\Longleftrightarrow} e^{x_0}=\frac{3}{e^{x_0}}\Leftrightarrow\left(e^{x_0}\right)^2=3\overset{e^{x_0}>0}{\Longleftrightarrow}e^{x_0}=\sqrt{3}$$

$$e^{-x_0}\overset{a^{-x}=\frac{1}{a^x},a\neq 0}{=}\frac{1}{e^{x_0}}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(x_0)=\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$e^{x_0}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \ln e^{x_0}=\ln\sqrt{3}\overset{\substack{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0\\ \sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}},\alpha\geq 0\\ \ln e=1}}{\Longleftrightarrow} x_0\ln e=\ln 3^{\frac{1}{2}}\overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow}x_0=\frac{\ln 3}{2}$$

$$f'(x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow 2f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Επειδή η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\frac{\ln 3}{2}$

υπάρχει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ με $(\varepsilon)\not\parallel y'y$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της (ε) θα είναι $\lambda=f'(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Η εξίσωση της ευθείας (ε) θα έχει την μορφή:

$$y=\lambda x+\kappa\overset{\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}}{\Longleftrightarrow}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\kappa$$

$$(\varepsilon): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\kappa$$

$$\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)\in(\varepsilon)\overset{\substack{f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{6}\\ x_0=\frac{\ln 3}{2}}}{\Longleftrightarrow}\mathrm{A}\left(\frac{\ln 3}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\in(\varepsilon)\overset{(\varepsilon):y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\kappa}{\Longleftrightarrow}\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\ln 3}{2}+\kappa\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}\ln 3}{6}+\kappa \Leftrightarrow \kappa=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}\ln 3}{6} \Leftrightarrow \kappa=\frac{\sqrt{3}\left(1-\ln 3\right)}{6} \overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow} \kappa=\frac{\sqrt{3}\left(\ln e-\ln 3\right)}{6}$$

$$\overset{\ln\theta_1-\ln\theta_2=\ln\frac{\theta_1}{\theta_2},\theta_1,\theta_2>0}{\Longleftrightarrow} \quad \kappa=\frac{\sqrt{3}\ln\frac{e}{3}}{6}$$

$T\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \left(\varepsilon\right)\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota:$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\kappa \overset{\kappa=\frac{\sqrt{3}\ln\frac{e}{3}}{6}}{\Longleftrightarrow} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}\ln\frac{e}{3}}{6} \Leftrightarrow y=\frac{2\sqrt{3}}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\frac{e}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(2x+\ln\frac{e}{3}\right)$$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\tau\rho\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=3x^4-6x^2+5\ \kappa\alpha\iota\ C_f\ \eta\ \gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta.$ $N\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi o\upsilon\nu\ \tau\rho\acute{\iota}\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau\alpha\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ o\iota\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma$ $\tau\eta\varsigma\ C_f\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ y=1$

$$f'\left(x\right)=\left(3x^4-6x^2+5\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} \left(3x^4\right)'+\left(-6x^2\right)'+\left(5\right)' \overset{\substack{\left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ \left(c\right)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}$$

$$3\left(x^4\right)'-6\left(x^2\right)'+0 \overset{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}}{=} 3\cdot 4x^3-6\cdot 2x=12x\left(x^2-1\right)=12x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$$

$f'\left(x\right)=12x\left(x-1\right)\left(x+1\right),\ x\in\mathbb{R}$

$\left(\varepsilon\right): y=1$

$T\acute{o}\tau\varepsilon\ o\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \lambda_\varepsilon\ \tau\eta\varsigma\ \left(\varepsilon\right)\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \lambda_\varepsilon=0$

$A\nu\ \left(l\right)\ \eta\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)\mu\varepsilon\ \left(\varepsilon\right)\not\parallel y'y$

$\kappa\alpha\iota\ \left(l\right)//\left(\varepsilon\right).T\acute{o}\tau\varepsilon\ o\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \lambda_l\ \tau\eta\varsigma\ \left(l\right)\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota:$

$\lambda_l=f'\left(x_0\right)=12x_0\left(x_0-1\right)\left(x_0+1\right)$

$$\left(l\right)//\left(\varepsilon\right)\Leftrightarrow \lambda_l=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 12x_0\left(x_0-1\right)\left(x_0+1\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_0=0\\ \acute{\eta}\\ x_0-1=0\\ \acute{\eta}\\ x_0+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=0\\ \quad\acute{\eta}\\ x_0=1\\ \quad\acute{\eta}\\ x_0=-1 \end{array}\right\}$$

4.

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ f\ \mu\varepsilon$
$f(x)=3x^2+5x+1\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon): y=x+2$

$$f'(x)=\left(3x^2+5x+1\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} \left(3x^2\right)'+\left(5x\right)'+\left(1\right)'$$

$$\overset{\substack{\left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} 3\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'+0 \overset{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}}{=} 3\cdot 2x+5\cdot 1=6x+5$$

$f'(x)=6x+5, x\in\mathbb{R}$

$(\varepsilon): y=x+2$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ_ε της (ε) θα είναι: $\lambda_\varepsilon=1$

Αν (l) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

με $(\varepsilon)\not\parallel y'y$ και $(l)\perp(\varepsilon)$. Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ_l της (l)

θα είναι:

$\lambda_l=f'\left(x_0\right)=6x_0+5$

$(l)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow \lambda_l\ \lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow 1\cdot\left(6x_0+5\right)=-1\Leftrightarrow 6x_0+5=-1\Leftrightarrow 6x_0=-6\Leftrightarrow$

$6x_0=6(-1)\Leftrightarrow x_0=-1$

Επειδή η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=-1$

υπάρχει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(-1, f(-1)\right)$

με $(\varepsilon)\not\parallel y'y, (l)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow \lambda_l\ \lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow 1\cdot\left(6x_0+5\right)=-1\Leftrightarrow 6x_0+5=-1\Leftrightarrow$

$6x_0=-6\Leftrightarrow 6x_0=6(-1)\Leftrightarrow x_0=-1$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της (ε) θα είναι:

$\lambda=f'\left(x_0\right)=f'(-1)=6(-1)+5=-1$

Η εξίσωση της ευθείας (ε) θα έχει την μορφή:

$y=\lambda x+\kappa \overset{\lambda=-1}{\Longleftrightarrow} y=-x+\kappa$

$(\varepsilon): y=-x+\kappa$

$f(-1)=3(-1)^2+5(-1)+1=3-5+1=-1$

$\mathrm{A}(-1, f(-1))\in(\varepsilon)\Leftrightarrow \mathrm{A}(-1,-1)\in(\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=-x+\kappa}{\Longleftrightarrow} -1=-(-1)+\kappa \Leftrightarrow -1=1+\kappa \Leftrightarrow$

$\kappa=-2$

Τότε η εξίσωση της ευθείας (ε) *θα είναι*:

$y=-x+\kappa \overset{\kappa=-2}{\Longleftrightarrow} y=-x-2$

5

Να βρεθεί τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ *που διέρχονται απο το σημείο* $\mathrm{A}(1,-4)$

.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Τ*ο σημείο* $\mathrm{A}(1,-4)$ *δεν ανήκει στην* C_f *γιατι* $f(1)=\dfrac{1^2}{2}=\dfrac{1}{2}\neq -4$

(Ι)Θ*α υποθέσω οτι υπάρχει εφαπτομένη* $(\varepsilon),(\varepsilon)\not\parallel y'y$ *της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ *τέτοιο ώστε* $\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon)$.

(ΙΙ)Θ*α βρώ την εξίσωση της* (ε) *συναρτήσει του* x_0

(ΙΙΙ)Ε*πειδή* $\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon)$ *οι συντεταγμένες του* Α *ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε). Σ*την εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα θέσω όπου* $x=1$ *και* $y=-4$ *και θα κατασκευάσω μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς* x_0

Α*ν η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό της παραβολής και το πρόβλημα δεν έχει λύση γιατι απο ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας παραβολής δεν μπορώ να φέρω εφαπτομένες σε αυτήν*!!!!

(IV)Γ*ια να βρώ τις εξισώσεις της ευθείας* (ε) *θα αντικαταστήσω τις τιμές του* x_0 *στην εξίσωση της ευθείας* (ε)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)' \overset{(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=} \frac{1}{2}\left(x^2\right)' \overset{(x^a)'=ax^{a-1}}{=} \frac{1}{2}\cdot 2x=x$$

$f'(x)=x, x\in\mathbb{R}$

Αν (ε) *η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ *με* $(\varepsilon)\not\parallel y'y$ *και* $\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon)$.Τ*ότε ο συντελεστής διεύθυνσης της* (ε) *θα είναι*:

$\lambda=f'(x_0)=x_0$

Η *εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα έχει την μορφή*:

$$y=\lambda x+\kappa \overset{\lambda=x_0}{\Longleftrightarrow} y=x_0x+\kappa$$

$(\varepsilon): y=x_0x+\kappa$

$$f(x_0)=\frac{{x_0}^2}{2}$$

$$\mathrm{M}(x_0, f(x_0))\in(\varepsilon)\Leftrightarrow \mathrm{A}\left(x_0,\frac{{x_0}^2}{2}\right)\in(\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=x_0x+\kappa}{\Longleftrightarrow} \frac{{x_0}^2}{2}=x_0x_0+\kappa \Leftrightarrow \kappa=\frac{{x_0}^2}{2}-{x_0}^2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa=\frac{{x_0}^2}{2}-\frac{2{x_0}^2}{2}\Leftrightarrow \kappa=-\frac{{x_0}^2}{2}$$

Τ*ότε η εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι*:

$$y=x_0x+\kappa \overset{\kappa=-\frac{{x_0}^2}{2}}{\Longleftrightarrow} y=x_0x-\frac{{x_0}^2}{2}$$

$$(\varepsilon): y=x_0x-\frac{{x_0}^2}{2}$$

$$\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -4=x_0\cdot 1-\frac{{x_0}^2}{2}\Leftrightarrow 2(-4)=2x_0-2\frac{{x_0}^2}{2}\Leftrightarrow {x_0}^2-2x_0-8=0\,(1)$$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$x_0 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \frac{2(1 \pm 3)}{2} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 1+3=4 \\ 1-3=-2 \end{cases}$$

Αν $x_0 = 4$ τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:

$$y = x_0 x - \frac{{x_0}^2}{2} \overset{x_0=4}{\Longleftrightarrow} y = 4x - \frac{4^2}{2} \Leftrightarrow y = 4x - 8$$

Αν $x_0 = -2$ τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:

$$y = x_0 x - \frac{{x_0}^2}{2} \overset{x_0=-2}{\Longleftrightarrow} y = -2x - \frac{(-2)^2}{2} \Leftrightarrow y = -2x - 2$$

6.

Να αποδείξετε οτι η ευθεία $y = x$ είναι εφάπτομένη της C_f με $f(x) = e^{\frac{x}{e}}$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{e}}\right)' \overset{\left(e^{F(x)}\right)' = e^{F(x)} F'(x)}{=} e^{\frac{x}{e}} \left(\frac{x}{e}\right)' = e^{\frac{x}{e}} \frac{1}{e} (x)' = \frac{e^{\frac{x}{e}}}{e}$$

Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ όταν:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon) \\ \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \end{array} \right\}$$

Η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 1 \\ \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon): y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^{\frac{x_0}{e}}}{e} = 1 \\ f(x_0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{x_0}{e}} = e^1 \\ e^{\frac{x_0}{e}} = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_0}{e} = 1 \\ e^{\frac{x_0}{e}} = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = e \\ e^{\frac{x_0}{e}} = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = e \\ e^{\frac{e}{e}} = e \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = e \\ e^1 = e \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_0 = e$$

Η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(e, f(e)\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 4x + 3$ στο σημείο $x_0 = 0$

2.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{3}$ στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ όταν ισχύει $f'(x_0) = 3f(x_0)$

3.

Δίνεται η συνάτρηση $f(x) = 7x^4 - 14x^2 + 13$ και C_f η γραφική της παράσταση. Να αποδείξετε οτι υπάρχουν τρία σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένης της C_f να είναι παράλληλες με την ευθεία $y = 9$

4.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της f με $f(x) = x^2 + 2x + 8$ που είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = \dfrac{x}{2} + 7$

5.

Να βρεθεί τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ που διέρχονται απο το σημείο $\mathrm{A}\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$

6.

Να αποδείξετε οτι η ευθεία $y = \dfrac{x}{2}$ είναι εφάπτομένη της C_f με $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{e}}}{2}$

7.

Να αποδείξετε οτι η ευθεία $y = x + 1$ είναι εφάπτομένη της C_f με $f(x) = e^x$

8.

Να αποδείξετε οτι η ευθεία $y = x - 1$ είναι εφάπτομένη της C_f με $f(x) = \ln x$

8.

Να αποδείξετε οτι η ευθεία $y = x + 2$ είναι εφάπτομένη της C_f με $f(x) = e^x + 1$