

<b>ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ</b>
----------------------------

<p>Αν <math>x = x(t)</math> είναι η συνάρτηση θέσης κινητού την χρονική στιγμή <math>t</math>          τότε θα έχω <math>u(t) = x'(t)</math> και <math>a(t) = x''(t) = u'(t)</math></p>
---

<p><math>u(t)</math>: Η ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή <math>t</math></p>
--

<p><math>a(t)</math>: Η επιτάχυνση του κινητού την χρονική στιγμή <math>t</math></p>
--

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1.

<p>Το διάστημα <math>x</math> που διανύει ένα κινητό σε χρόνο <math>t</math> sec είναι :</p>
--

$x(t) = \frac{5}{3}t^3 - 10t^2 + 21t + 3, 0 \leq t \leq 6$
--

Να βρείτε :

<p>I) Το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης την χρονική στιγμή <math>t = 2</math> sec</p>
--

<p>II) Την αρχική ταχύτητα του κινητού</p>
--

<p>III) Την χρονική στιγμή που το κινητό έχει ταχύτητα 6 m/ sec</p>
---

I)

<p>Ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης <math>f</math> στο σημείο <math>x_0 =</math> Παράγωγος της <math>f</math> στο σημείο <math>x_0</math></p>
--

$x'(t) = \left( \frac{5}{3}t^3 - 10t^2 + 21t + 3 \right)'$
--

$[ F(x) + G(x) ]' = F'(x) + G'(x)$
------------------------------------

$[ F(x) - G(x) ]' = F'(x) - G'(x)$
------------------------------------

$[ cF(x) ]' = c F'(x), c : \text{Σταθερά}$
--

$(c)' = 0, c : \text{Σταθερά}$
--------------------------------

$(x)' = 1$
------------

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
-------------------------------------

$$= \left( \frac{5}{3}t^3 \right)' - (10t^2)' + (21t)' + (3)' = \frac{5}{3}(t^3)' - 10(t^2)' + 21(t)' =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 3t^2 - 10 \cdot 2t + 21 \cdot 1 = 5t^2 - 20t + 21$$

Οπότε :  $x'(t) = 5t^2 - 20t + 21, 0 \leq t \leq 6$

Ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης την χρονική στιγμή  $t = 2$  sec θα είναι :

$$x'(2) = 5 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 21 = 5 \cdot 4 - 20 + 21 = 20 - 20 + 21 = 21 - 20 = 1 \text{ m/ sec}$$

II)

$u(t) = x'(t)$
----------------

<p><math>u(t)</math> : Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή <math>t</math></p>
---

<p><math>x(t)</math> : Η συνάρτηση θέσης κινητού την χρονική στιγμή <math>t</math></p>
--

Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή  $t$  θα είναι :

$$u(t) = x'(t) = 5t^2 - 20t + 21$$

$$\text{Οπότε : } u(t) = 5t^2 - 20t + 21, 0 \leq t \leq 6$$

Η αρχική ταχύτητα του σώματος θα είναι η ταχύτητα που θα έχει το

σώμα την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Άρα η αρχική ταχύτητα του

σώματος θα είναι :  $u(0) = 5 \cdot 0^2 - 20 \cdot 0 + 21 = 21 \text{ m/sec}$

III) Έστω την χρονική στιγμή  $t$  το κινητό έχει ταχύτητα  $6 \text{ m/sec}$ .

Τότε θα έχω :

$$u(t) = 6 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t + 21 = 6 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t + 21 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 20t + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το 5}}{5(t^2 - 4t + 3)} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Επειδή  $\Delta > 0$  η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες

πραγματικές και άνισες :

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2} = \frac{2(2 \pm 1)}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 2+1=3 \text{ sec (Δεκτή γιατί } 0 \leq t \leq 6) \\ 2-1=1 \text{ sec (Δεκτή γιατί } 0 \leq t \leq 6) \end{cases}$$

2.

Το διάστημα  $x = x(t)$  σε  $m$  που διανύει μια πέτρα όταν εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω δίνεται από την σχέση :

$$x(t) = 100t - 10t^2 \quad \text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε sec}$$

I) Να βρείτε την ταχύτητα της πέτρας όταν  $t_1 = 2 \text{ sec}$

II) Τι συμβαίνει όταν  $t_2 = 6 \text{ sec}$

III) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η πέτρα

I) Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή  $t$  θα είναι :

$$u(t) = x'(t) = (100t - 10t^2)' = (100t)' - (10t^2)' = 100(t)' - 10(t^2)' = 100 \cdot 1 - 10 \cdot 2t = 100 - 20t$$

Η ταχύτητα της πέτρας την χρονική στιγμή  $t_1 = 2 \text{ sec}$  θα είναι :

$$u_1 = u(2) = 100 - 20 \cdot 2 = 100 - 40 = 60 \text{ m/sec}$$

II) Η ταχύτητα της πέτρας την χρονική στιγμή  $t_2 = 6 \text{ sec}$  θα είναι :

$$u_2 = u(6) = 100 - 20 \cdot 6 = 100 - 120 = -20 \text{ m/sec}$$

Επειδή  $u_2 < 0$  το σώμα κατεβαίνει προς τα κάτω

III) Έστω την χρονική στιγμή  $t$  το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος τότε θα ισχύει :

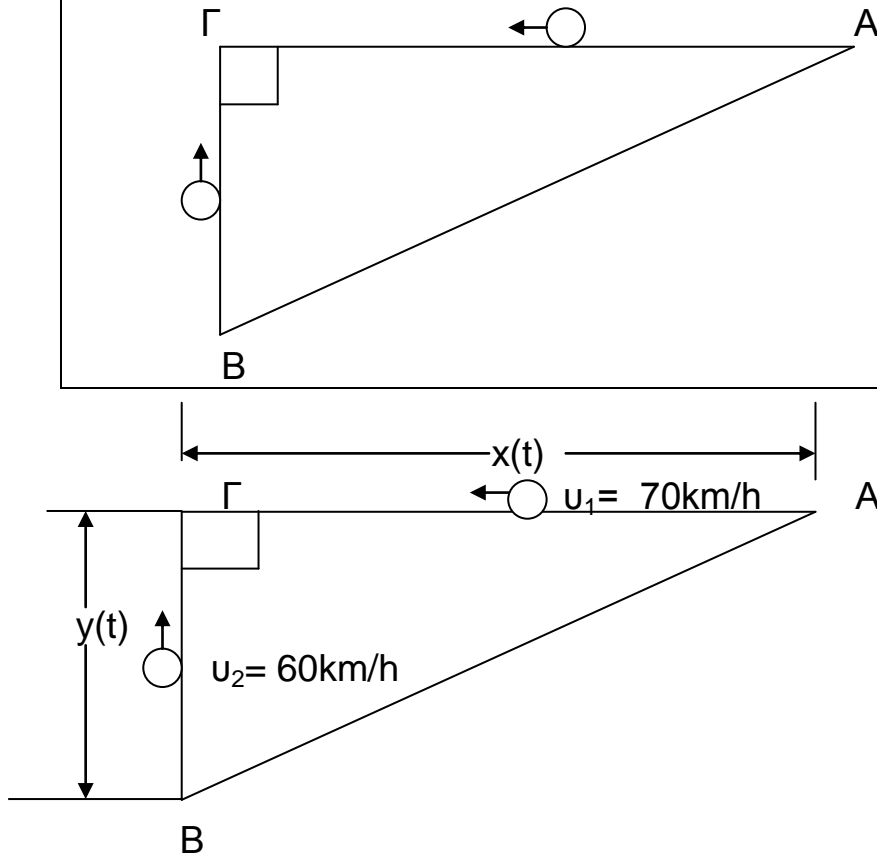
$$u(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - 20t = 0 \Leftrightarrow -20t = -100 \Leftrightarrow t = \frac{-100}{-20} \Leftrightarrow t = 5 \text{ sec}$$

Τότε το μέγιστο ύψος που φτάνει η πέτρα είναι :

$$x_{\max} = x(5) = 100 \cdot 5 - 10 \cdot 5^2 = 500 - 250 = 250 \text{ m}$$

3.

Δυο αυτοκίνητα κινούνται κατά μήκος των δρόμων ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητες 70km/h και 60km/h αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς το χρόνο  $t$  την χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το πρώτο αυτοκίνητο απέχει από την διασταύρωση 800m και το δεύτερο 600m



Έπειδή η ταχύτητα του κινητού Α είναι  $u_1 = 70 \text{ km/h}$  θα έχω :

$$x'(t) = u_1 = 70 \text{ km/h}$$

Έπειδή η ταχύτητα του κινητού Β είναι  $u_2 = 60 \text{ km/h}$  θα έχω :

$$y'(t) = u_2 = 60 \text{ km/h}$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο  $\Gamma \left( \hat{\Gamma} = 90^\circ \right)$ . Οπότε από το

Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω :

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow AB^2 = x^2(t) + y^2(t) \stackrel{AB \geq 0}{\Leftrightarrow} AB = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση :  $f(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, t \geq 0$

Αν  $t \geq 0$  έχω :  $f(t) = \left( x^2(t) + y^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \left[ (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}-1} (x^2(t) + y^2(t))' = \\
 &= \frac{1}{2} (x^2(t) + y^2(t))^{-\frac{1}{2}} \left[ (x^2(t))' + (y^2(t))' \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}}} \left[ 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2 \left[ x(t)x'(t) + y(t)y'(t) \right]}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}
 \end{aligned}$$

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}, \alpha \geq 0, \mu, \nu \in \mathbb{R}^*$$

$$(f^a)' = a f^{a-1} f'$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}, \alpha \neq 0$$

$$\text{Οπότε: } f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$$

Την χρονική στιγμή  $t_0$  θα έχω:

$$x(t_0) = 800m \quad \stackrel{\substack{\text{Τα } m \text{ για να γίνουν } km \text{ τα} \\ \text{διαιρώ με το } 1000}}{=} \quad \frac{800}{1000} km = 0,8km$$

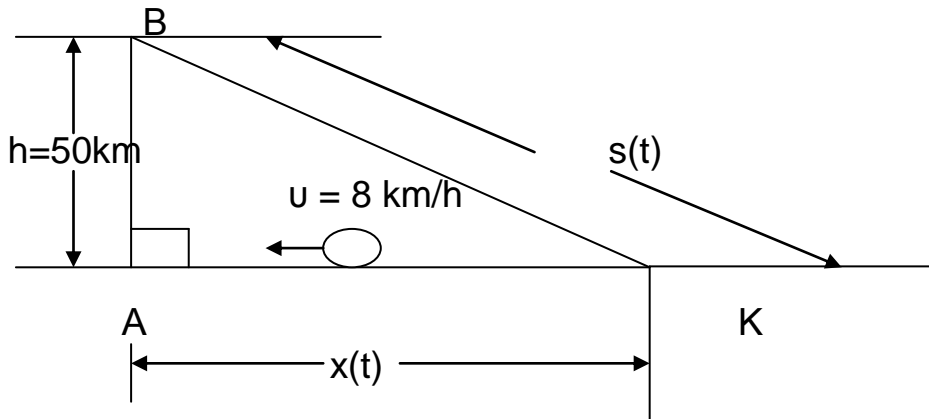
$$y(t_0) = 600m \quad \stackrel{\substack{\text{Τα } m \text{ για να γίνουν } km \text{ τα} \\ \text{διαιρώ με το } 1000}}{=} \quad \frac{600}{1000} km = 0,6km$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης AB την χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι :

$$f'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{0,8 \cdot 70 + 0,6 \cdot 60}{\sqrt{0,8^2 + 0,6^2}} = \frac{56 + 36}{\sqrt{0,64 + 0,36}} = \frac{92}{\sqrt{1}} = 92 km/h$$

4.

Ένας άνθρωπος πλησιάζει τη βάση A ενός πύργου AB που έχει ύψος  $h = 50m$  με ταχύτητα  $8 km/h$ . Να βρεθεί με τι ταχύτητα πλησιάζει την κορυφή του B όταν βρίσκεται σε απόσταση  $120m$  από την βάση του.



Τα m για να γίνουν km τα  
διαιρώ με το 1000

$$h = 50m = \frac{50}{1000} = 0,05km$$

Επειδή ο άνθρωπος πλησιάζει τη βάση A ενός πύργου AB με ταχύτητα  $u = 8 \text{ km/h}$  θα έχω :

$$x'(t) = u = 8 \text{ km/h}$$

Το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο στο A ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Οπότε από το

Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω :

$$KB^2 = AB^2 + AK^2 \Leftrightarrow KB^2 = h^2 + x^2(t) \Leftrightarrow KB^2 = 0,05^2 + x^2(t) \Leftrightarrow$$

$$KB^2 = 0,0025 + x^2(t) \stackrel{KB \geq 0}{\Leftrightarrow} KB = \sqrt{0,0025 + x^2(t)} \Leftrightarrow s(t) = \sqrt{0,0025 + x^2(t)}$$

$$\text{Οπότε : } s(t) = \sqrt{0,0025 + x^2(t)}, t \geq 0$$

$$\text{Αν } t \geq 0 \text{ θα έχω : } s(t) = (0,0025 + x^2(t))^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} s'(t) &= \left[ (0,0025 + x^2(t))^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} (0,0025 + x^2(t))^{\frac{1}{2}-1} (0,0025 + x^2(t))' = \\ &= \frac{1}{2} (0,0025 + x^2(t))^{-\frac{1}{2}} \left[ (0,0025)' + (x^2(t))' \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{(0,0025 + x^2(t))^{\frac{1}{2}}} 2x(t)x'(t) = \\ &= \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{0,0025 + x^2(t)}} \end{aligned}$$

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}, \alpha \geq 0, \mu, \nu \in \mathbb{R}^*$$

$$(f^a)' = a f^{a-1} f'$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(c)' = 0, c : \text{Σταθερά}$$

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}, a \neq 0$$

$$\text{Οπότε : } s'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{0,0025 + x^2(t)}}, t \geq 0$$

Την χρονική στιγμή  $t_0$  θα έχω:

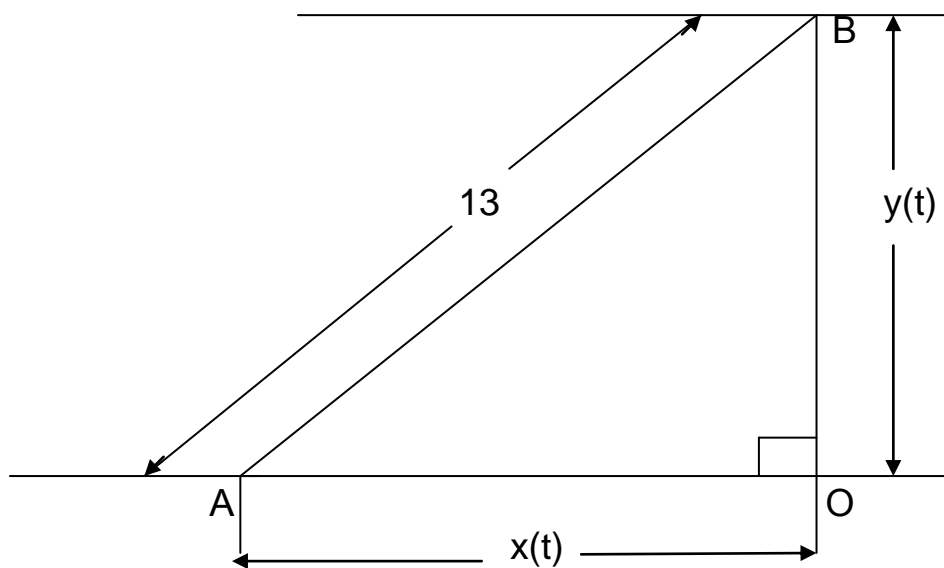
$$x(t_0) = 120m \quad \begin{array}{l} \text{Τα m για να γίνουν km τα} \\ \text{διαιρώ με το 1000} \end{array} = \frac{120}{1000} = 0,12km$$

Η ταχύτητα με την οποία πλησιάζει ο άνθρωπος την κορυφή του Β τη χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι:

$$\begin{aligned} v_1 = s'(t_0) &= \frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{0,0025 + x^2(t_0)}} = \frac{0,12 \cdot 8}{\sqrt{0,0025 + 0,12^2}} = \frac{0,12 \cdot 8}{\sqrt{0,0025 + 0,12^2}} = \\ &= \frac{0,96}{\sqrt{0,0025 + 0,0144}} = \frac{0,96}{\sqrt{0,0169}} = \frac{0,96}{0,13} = \frac{96}{13} km/h \end{aligned}$$

5.

Μια σκάλα ΑΒ μήκους 13 m είναι πλάγια στερεωμένη στον τοίχο. Κάποια στιγμή η σκάλα γλιστράει και όταν το άκρο της Α βρίσκεται σε απόσταση 5 m από τον τοίχο ο ρυθμός κίνησης είναι 3 m/s. Να βρείτε τον ρυθμό πτώσης του άκρου της Β εκείνη τη χρονική στιγμή.



Επειδή το άκρο Α της σκάλας πλησιάζει τον τοίχο με ρυθμό κίνησης είναι 3 m/s θα έχω :  $x'(t) = 3m/s$

Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο στο Α ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Οπότε από το

Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 \Leftrightarrow 13^2 = x^2(t) + y^2(t) \Leftrightarrow x^2(t) + y^2(t) = 169$$

$$\text{Οπότε : } x^2(t) + y^2(t) = 169, t \geq 0(1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f, g: \text{Παραγωγίσιμες} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x)=g'(x)$$

Προσοχή ισχύει η συνεπαγωγή και όχι η ισοδυναμία!!!

$$x^2(t) + y^2(t) = 169 \quad \Rightarrow \quad (x^2(t) + y^2(t))' = (169)' \Leftrightarrow$$

$$(x^2(t))' + (y^2(t))' = 0 \Leftrightarrow 2x(t)x'(t) + 2y'(t)y(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t)) = 0 \Leftrightarrow x(t)x'(t) + y'(t)y(t) = 0$$

$$\text{Οπότε : } x(t)x'(t) + y'(t)y(t) = 0, t \geq 0(2)$$

$(c)' = 0, c: \text{Σταθερά}$
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f^a)' = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$

Την χρονική στιγμή  $t_0$  θα ισχύει  $x(t_0) = 5m$ . Οπότε από την σχέση (1) θα έχω :

$$x^2(t_0) + y^2(t_0) = 169 \Leftrightarrow 5^2 + y^2(t_0) = 169 \Leftrightarrow 25 + y^2(t_0) = 169 \Leftrightarrow y^2(t_0) = 169 - 25$$

$$\Leftrightarrow y^2(t_0) = 144 \stackrel{y(t_0) \geq 0}{\Leftrightarrow} y(t_0) = \sqrt{144} \Leftrightarrow y(t_0) = 12m$$

Θέτω όπου  $t$  το  $t_0$  στην σχέση (2):

$$x(t_0)x'(t_0) + y'(t_0)y(t_0) = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 3 + 12 \cdot y'(t_0) = 0 \stackrel{\text{Βγάλω κοινό παράγοντα το 3}}{\Leftrightarrow} 3(5 + 4y'(t_0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 + 4y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 4y'(t_0) = -5 \Leftrightarrow y'(t_0) = -\frac{5}{4} m/s$$

Ο ρυθμός πτώσης του άκρου Β την χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι :

$$y'(t_0) = -\frac{5}{4} m/s$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Το διάστημα $x$ που διανύει ένα κινητό σε χρόνο $t$ sec είναι :
$x(t) = \frac{7}{3}t^3 - 21t^2 + 50t + 3, 0 \leq t \leq 5$

Να βρείτε :

(I) Το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης την χρονική στιγμή  $t = 4\text{ s}$

(II) Την αρχική ταχύτητα του κινητού

(III) Την χρονική στιγμή που το κινητό έχει ταχύτητα  $15\text{ m/s}$

2.

Το διάστημα  $x = x(t)$  σε m που διανύει μια πέτρα όταν εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω δίνεται από την σχέση :

$x(t) = 500t - 25t^2$  όπου  $t$  ο χρόνος σε sec

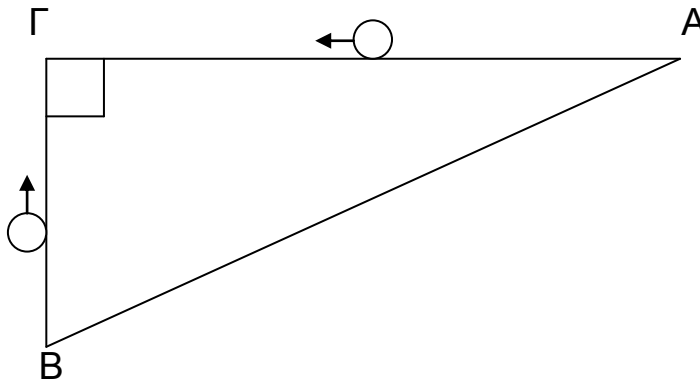
I) Να βρείτε την ταχύτητα της πέτρας όταν  $t = 7\text{ sec}$

II) Τι συμβαίνει όταν  $t = 12\text{ sec}$

III) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η πέτρα

3.

Δυο αυτοκίνητα κινούνται κατά μήκος των δρόμων ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητες  $100\text{ km/h}$  και  $50\text{ km/h}$  αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς το χρόνο  $t$  την χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το πρώτο αυτοκίνητο απέχει από την διασταύρωση  $400\text{ m}$  και το δεύτερο  $300\text{ m}$



4.

Ένας άνθρωπος πλησιάζει τη βάση Α ενός πύργου ΑΒ που έχει ύψος  $h = 80\text{ m}$  με ταχύτητα  $5\text{ km/h}$ . Να βρεθεί με τι ταχύτητα πλησιάζει την κορυφή του Β όταν βρίσκεται σε απόσταση  $60\text{ m}$  από την βάση του.

5.

Μια σκάλα ΑΒ μήκους  $13\text{ m}$  είναι πλάγια στερεωμένη στον τοίχο. Κάποια στιγμή η σκάλα γλιστράει και όταν το άκρο της Α βρίσκεται σε απόσταση  $12\text{ m}$  από τον τοίχο ο ρυθμός κίνησης είναι  $2\text{ m/s}$ . Να βρείτε τον ρυθμό πτώσης του άκρου της Β εκείνη τη χρονική στιγμή

