ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ (N_o1)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-4}$$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.Τότε θα έχω :

D_f= { $x \in$ IR : $x^2-3x+2 \geq 0$, $x^2-4 \neq 0$}

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{1}\ x^2\ \boxed{-3}\ x\ \boxed{+2} = 0 \quad (1)$

$\alpha = 1 \quad \beta = -3 \quad \gamma = 2$

$\Delta = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = (-3)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

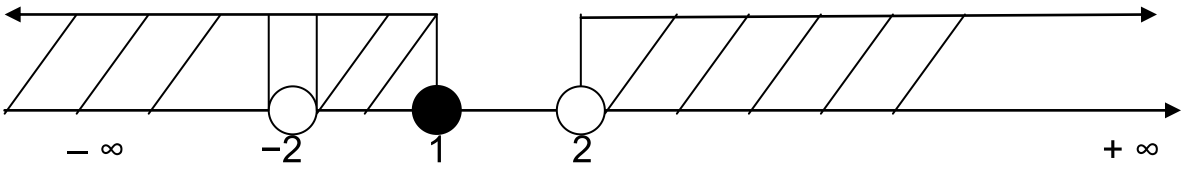
$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	–	0	+	

$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty , 1\,] \cup [2, +\infty)$

Θεωρώ την εξίσωση : $x^2 – 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{4}$
$\Longleftrightarrow x = \pm 2$
$x^2 – 4 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 2$

Έχω : $x \in D_f \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 – 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 – 4 \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \in (– \infty , 1\,] \cup [2, + \infty) \\ x \neq \pm 2 \end{array}\right\}$



$x \in (– \infty , −2) \cup (−2, 1\,] \cup (2, + \infty)$

Άρα : $D_f = (– \infty , −2) \cup (−2, 1\,] \cup (2, + \infty)$

2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο :

$$f(x) = \sqrt{\frac{3^{x+1} - 1}{x - 3}}$$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f.Τότε θα έχω:

$$D_f = \{x \in IR : \frac{3^{x+1} - 1}{x - 3} \geq 0 , x – 3 \neq 0\}$$

$3^{x+1} – 1 > 0 \Longleftrightarrow 3^{x+1} > 1 \Longleftrightarrow 3^{x+1} > 3^0 \Longleftrightarrow x+1>0 \Longleftrightarrow x>–1$
$3^{x+1} – 1 = 0 \Longleftrightarrow 3^{x+1} = 1 \Longleftrightarrow 3^{x+1} = 3^0 \Longleftrightarrow x+1=0 \Longleftrightarrow x=–1$
$3^{x+1} – 1 < 0 \Longleftrightarrow x<–1$

x	$–\infty$	$–1$	$+\infty$
$3^{x+1} – 1$	–	0	+

$x – 3 > 0 \Longleftrightarrow x > 3$
$x – 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3$
$x – 3 < 0 \Longleftrightarrow x < 3$
Επειδή $x – 3 \neq 0$ θα έχω : $x \neq 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	‖	$+$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$3^{x+1}-1$	$-$	0	$+$	‖	$+$
$x-3$	$-$		$-$	‖	$+$
$\dfrac{3^{x+1}-1}{x-3}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

Άρα : $D_f = (-\infty,-1] \cup (3,+\infty)$

3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\|x+1\|+\|x-2\|-5}$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.Τότε θα έχω :

$D_f = \{x \in IR: |x+1|+|x-2|-5 \geq 0\}$

$x+1 > 0 \Longleftrightarrow x > -1$
$x+1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$
$x+1 < 0 \Longleftrightarrow x < -1$

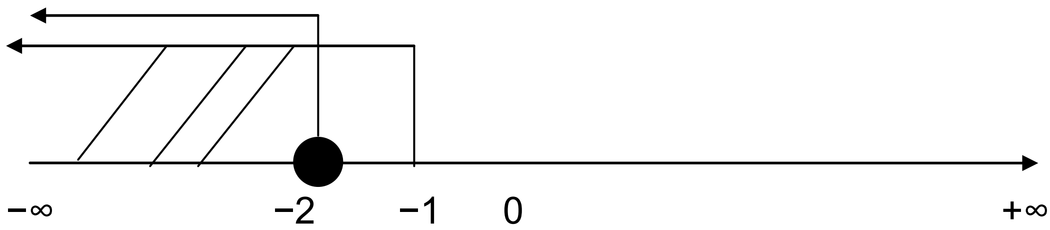
$x-2 > 0 \Longleftrightarrow x > 2$
$x-2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$
$x-2 < 0 \Longleftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$ -1	2	$+\infty$
$x+1$	—	$+$	$+$
$x-2$	—	—	$+$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\|x+1\|+\|x-2\|$	$-x-1-x+2$ $=-2x+1$	$x+1-x+2$ $=3$	$x+1+x-2=$ $2x-1$
$\|x+1\|+\|x-2\|-5$	$-2x+1-5=$ $-2x-4$	$3-5=-2$	$2x-1-5=$ $2x-6$

$$|x+1|+|x-2|-5 = \begin{cases} -2x-4, & x<-1 \\ -2, & -1\le x\le 2 \\ 2x-6, & x>2 \end{cases}$$

Αν $x<-1$ και $|x+1|+|x-2|-5 \ge 0$ τότε θα έχω :

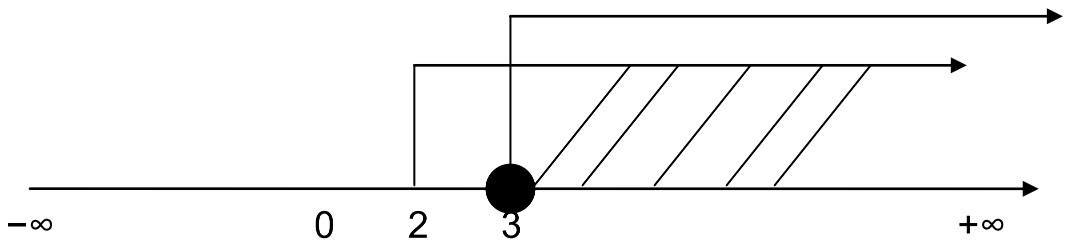
$$\left.\begin{array}{l} -2x-4\ge 0 \\ x<-1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x\ge 4 \\ x<-1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-2x}{-2}\le\dfrac{4}{-2} \\ x<-1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\le -2 \\ x<-1 \end{array}\right\}$$



$\Longleftrightarrow$ $x\in(-\infty, -2]$

Αν $-1\le x\le 2$ τότε θα έχω$|x+1|+|x-2|-5 = -2$
Αν $x>2$ και $|x+1+|x-2|-5 \ge 0$ τότε θα έχω

$$\left.\begin{array}{l} 2x-6\ge 0 \\ x>2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x\ge 6 \\ x>2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2x}{2}\ge\dfrac{6}{2} \\ x>2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x>2 \end{array}\right\}$$



$\Longleftrightarrow$ $x\in[3, +\infty)$

Άρα :$x\in D_f \Longleftrightarrow x\in(-\infty, -2]$ ή $x\in[3, +\infty) \Longleftrightarrow$
$x\in(-\infty, -2]U[3, +\infty)$
Οπότε : $D_f = (-\infty, -2]U[3, +\infty)$

4.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο :

$$f(x) = \ln x^2 + 3\ln(x-1) - \ln(x+2)$$

Αν Α το πεδίο ορισμού της f.Τότε θα έχω:

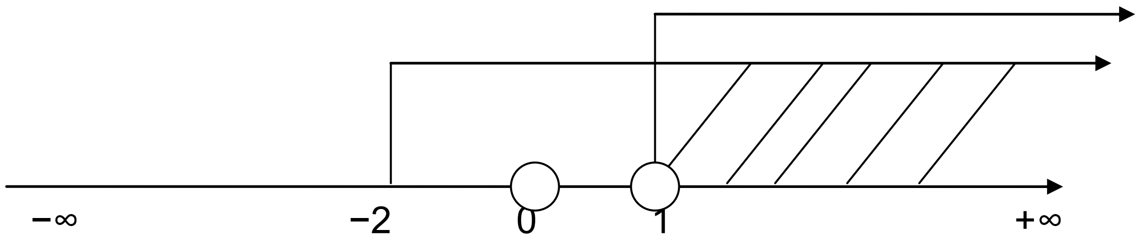
$D_f = \{ x \in IR : x^2 > 0 ,\ x-1>0,\ x+2>0\}$

$x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$

$x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 1$

$x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x > -2$

$x \in D_f \Longleftrightarrow (x \neq 0 ,\ x > 1 ,\ x > -2) \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty)$



Άρα: $D_f = (1, +\infty)$

5.

Έστω συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in IR$
Να βρεθούν οι αριθμοί $f(f(1))$, $f(f(f(1)))$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$

Το πεδίο ορισμού της f είναι τι IR

$f(f(1)) = 1^2 - 1 + 1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f(f(f(1))) = f(1)^2 - f(1) + 1 \\ f(f(f(1))) = f(1) \end{array}\right\}$$

Οπότε : $f(1)^2 - f(1) + 1 = f(1) \Longleftrightarrow f(1)^2 - f(1) + 1 - f(1) = 0$

$f(1)^2 - 2f(1) + 1 = 0 \Longleftrightarrow f(1)^2 - 2 \cdot f(1) \cdot 1 + 1^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$(f(1) - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow f(1) - 1 = 0 \Longleftrightarrow f(1) = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2+3} - e^{4x}}}{x^2 - 1}$$

2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο :

$$f(x) = \sqrt{\frac{0{,}5^{x} - 1}{x^2 - x}}$$

3.

Να αποδείξετε ότι το το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{2|x-2| + |x-3| - x + 1} \text{ είναι το } \mathbb{R}$$

4.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο :

$$f(x) = \ln x^{3^{\nu+3} - 3^{\nu+2} + 3^{\mu+1} - 3^{\mu}} + 3\ln(x-8) - \ln(x+5),\ \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

<u>Υποδειξη</u>

$$3^{\nu+3} - 3^{\nu+2} + 3^{\mu+1} - 3^{\mu} = 3\cdot 3^{\nu+2} - 3^{\nu+2}\cdot 1 + 3\cdot 3^{\mu} - 3^{\mu}\cdot 1 =$$

$$3^{\nu+2}(3-1) + 3^{\mu}(3-1) = 2\cdot 3^{\nu+2} + 2\cdot 3^{\mu} = 2\cdot\left(3^{\nu+2} + 3^{\mu}\right)$$

Οπότε $3^{\nu+3} - 3^{\nu+2} + 3^{\mu+1} - 3^{\mu}$ *είναι άρτιος*

5.

Έστω συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(f(x)) = x^2 - 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Να βρεθούν οι αριθμοί f(f(2)) , f(f(f(2))) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι f(2) = 2

6.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}{x^2 - 9}$$