

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ(N_o2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Αν A το πεδίο ορισμού της f. Τότε θα έχω :

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : e^x - 1 > 0, x^2 - 1 > 0 \}$$

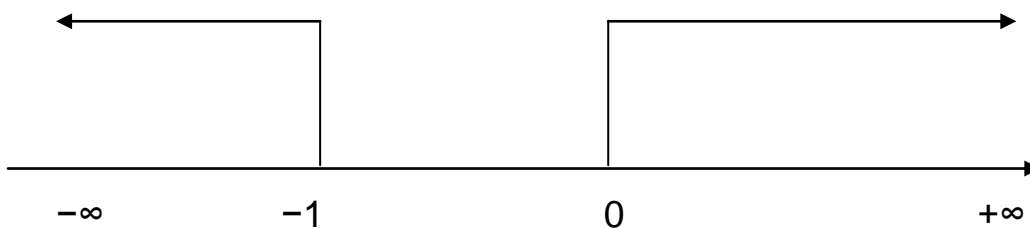
$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$$

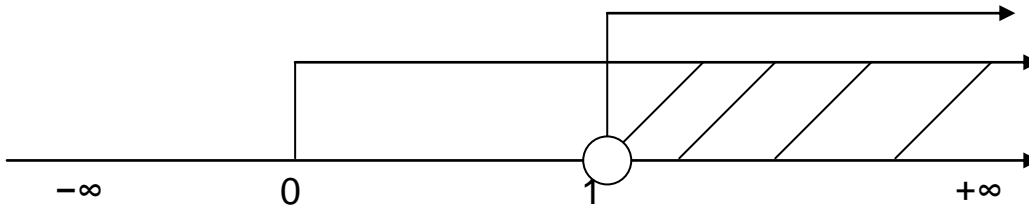
$$\text{Θεωρώ την εξίσωση : } x^2 - 1 = 0 \text{ ή } x^2 = 1 \text{ ή } x = \pm \sqrt{1} \text{ ή } x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	0	+

$$x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & x \in D_f \iff \left. \begin{aligned} & e^x - 1 > 0 \\ & x^2 - 1 > 0 \end{aligned} \right\} \iff \left. \begin{aligned} & x > 0 \\ & x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{aligned} \right\} \iff \\ & \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & x > 0 \\ & x < -1 \\ & \text{(Άτοπο)} \end{aligned} \right] \text{ ή } \left[\begin{aligned} & x > 1 \\ & x > 0 \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \iff x > 1 \iff x \in (1, +\infty)
 \end{aligned}$$





Άρα : $D_f = (1, +\infty)$

2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν A το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \geq 0\}$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2(x-3) - 4(x-3) = (x^2-4)(x-3)$$

$$x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$$

$$x - 3 < 0 \iff x < 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$		0	
		$-$	$+$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \text{ ή } x = \pm\sqrt{4} \iff x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$		0	0	
	$+$	0	$-$	0
				$+$

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
x^2-4	+	0	-	0	+
$(x-3)(x^2-4)$	-	0	+	0	+

$$x \in D_f \iff (x-3)(x^2-4) \geq 0 \iff x \in [-2, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$D_f = [-2, 2] \cup [3, +\infty)$$

3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω :

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 + 5x - 12 \neq 0 \}$$

Θεωρώ την εξίσωση :

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \iff x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 0 \iff$$

$$x^2(x-2) - 2x(x-2) + 1(x-2) = 0 \iff$$

$$(x^2 - 2x + 1)(x-2) = 0 \iff (x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2)(x-2) = 0 \iff$$

$$(x-1)^2(x-2) = 0 \iff$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-1)^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x-2 = 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} x-1 = 0 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

$$x \in D_f \iff x^3 - 5x^2 + 8x - 12 \neq 0 \iff (x \neq 1 \text{ και } x \neq 2) \iff$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

4.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}{\sqrt{x^2 - x}}$$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 \geq 0, x^2 - x > 0\}$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$\boxed{1} x^2 \boxed{-8} x \boxed{+15} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = -8 \quad \gamma = 15$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$	
$x^2 - 8x + 15$	+	0	-	0	+

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση : $x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{array} \right\}$$

$$x^2 - x \neq 0 \iff (x \neq 0, x \neq 1)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	-	+	

x	$-\infty$	0	1	3	5	$+\infty$	
$x^2 - 8x + 15$	+	+	+	0	-	0	+
$x^2 - x$	+	-	+	+	+	+	

$$x \in D_f \iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3] \cup [5, +\infty)$$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (1, 3] \cup [5, +\infty)$$

5.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3|x| - 4}$$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3|x| - 4 \geq 0\}$$

$$x \in D_f \iff x^2 + 3|x| - 4 \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } |x| = t, t \geq 0 \quad (2)$$

$$x^2 = |x|^2 = t^2$$

Τότε η σχέση (1) γίνεται :

$$t^2 + 3t - 4 \geq 0 \quad (3)$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$\boxed{1} t^2 \boxed{+3} t \boxed{-4} = 0 \quad (4)$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = +3 \quad \gamma = -4$$

$$\Delta = \beta^2 - 4 \alpha \gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (4) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$t_1 = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

t	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$t^2 + 3t - 4$	+	0	-	0	+

$$t^2 + 3t - 4 \leq 0 \iff t \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty) \iff$$

$$\left. \begin{array}{l} t \leq -4 \text{ (Άτοπο γιατί } t \geq 0) \\ \text{ή} \\ t \geq 1 \end{array} \right\} \iff$$

$$t \geq 1 \iff |x| \geq 1 \iff (x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1) \iff$$

$$x \in (-\infty, -1] \text{ ή } x \in [1, +\infty) \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

6.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{1 - e^{-x}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{e^x - 1}{1 - e^{-x}} > 0, 1 - e^{-x} \neq 0 \right\}$$

Θεωρώ την εξίσωση:

$$1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Έχω: } 1 - e^{-x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^x - 1}{1 - e^{-x}} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{-x} = \frac{1}{e^x} \\ \frac{e^x - 1}{1 - \frac{1}{e^x}} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^x - 1}{\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x}} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^x - 1}{\frac{e^x - 1}{e^x}} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^x (e^x - 1)}{e^x - 1} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\text{Οπότε: } D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - e^x)}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Υποδειξη:

$$e^{2x} - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x (e^x - 1) > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > 0$$

2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

Υποδειξη:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2)$$

3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^5 + 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$$

Υποδειξη:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = (x^3 - 3x^2) + (-x^2 + 3x) + (x - 3)$$

4.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

5.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5|x| + 4}$$

6.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \ln \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x}$$