ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} \qquad g(x) = \frac{1}{x(x+2)}$$

Να βρεθεί η διαφορά f−g

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f .Τότε θα έχω :

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x(x+1) \neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση:

$$x(x+1) = 0 \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{matrix}\right\}$$

$x \in A \Longleftrightarrow x(x+1) \neq 0 \Longleftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq -1) \Longleftrightarrow$

$x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$

$D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$

Αν D_g το πεδίο ορισμού της g .Τότε θα έχω :

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x(x+2) \neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση:

$$x(x+2) = 0 \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x+2=0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x=-2 \end{matrix}\right\}$$

$x \in B \Longleftrightarrow x(x+2) \neq 0 \Longleftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq -2) \Longleftrightarrow$

$x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,+\infty)$

$D_g = (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,+\infty)$

Αν D_{f-g} το πεδίο ορισμού της f−g .Τότε θα έχω :

$D_{f-g} = \{ x \in \mathbb{R} : x(x+1) \neq 0 , x(x+2) \neq 0 \}$

$x \in D_f \Longleftrightarrow$ (x(x+1) ≠0, x(x+2) ≠0) $\Longleftrightarrow$ (x≠−2, x≠−1,x≠ 0)

$x \in (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$

$D_{f-g} = (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$

Για κάθε $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$ θα έχω :

$$(f-g)(x) = f(x)-g)(x) = \overset{x+2}{\frac{1}{x(x+1)}} - \overset{x+1}{\frac{1}{x(x+2)}} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x+2)}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1 \cdot (x+1)}{x(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{x+2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{x+2-(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x+2-x-1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad g(x) = x^{x-2}$$

Να βρεθεί το γινόμενο fg

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f .Τότε θα έχω :

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση: $x-1 = 0 \Longleftrightarrow x=1$

$x \in D_f \Longleftrightarrow x-1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 1 \Longleftrightarrow$

$x \in$ (−∞,1)U(1,+ ∞)

D_f =(−∞,1)U(1,+ ∞)

Αν D_g το πεδίο ορισμού της g .Τότε θα έχω :

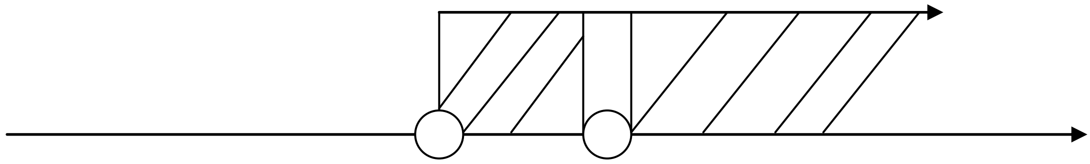
D_g ={ $x \in \mathbb{R}$: x>0}= (0,+ ∞)

Αν D_{fg} το πεδίο ορισμού της fg .Τότε θα έχω :

D_{fg} ={ $x \in \mathbb{R}$: x−1 ≠0, x>0}

$$x \in D_{fg} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x-1 \neq 0 \\ \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x \neq 1 \\ \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

D_{fg} = (0,1)U(1,+ ∞)



−∞ 0 1 +∞

Για κάθε $x \in$ (0,1)U(1,+ ∞) θα έχω :

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{x-1} \bullet x^{x-2} = \frac{x^{x-2}}{x-1}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!
Για να ορίζεται η συνάρτηση f(x) = $\alpha(x)^{\beta(x)}$ όπου α(x), β(x) παραστάσεις του x θα πρέπει : I)Να ορίζεται το α(x) II)Να ορίζεται το β(x) III) α(x) >0

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} -5x, x<0 \\ x^2, x\geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, x<-1 \\ 2x+3\ , x \geq 4 \end{cases}$$

Να βρεθεί το άθροισμα f+g

<u>Απόδειξη</u>

X	−∞		−1		0		1		4		+∞
f(x)		$-5x$	5	$-5x$		Δεν ορίζεται	1	x^2	16	x^2	
g(x)		x^2		Δεν ορίζεται		Δεν ορίζεται		Δεν ορίζεται	11	$2x+3$	
(f+g)(x)		x^2-5x		Δεν ορίζεται		Δεν ορίζεται		Δεν ορίζεται	27	x^2+2x+3	

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f+g είναι :
$(-\infty,-1) \cup [4,+\infty)$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2-5x\ , & x \in (-\infty,-1) \\ 27\ , & x = 4 \\ x^2+2x+3, & x \in (4,+\infty) \end{cases}$$

Επειδή $27 = 4^2+2 \cdot 4+3$ Θα έχω :

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2-5x\ , & x \in (-\infty,-1) \\ x^2+2x+3, & x \in [4,+\infty) \end{cases}$$

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το IR που ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{l}(2f-g)(x) = -3x \\ (7f+2g)(x) = -5x\end{array}\right\}$$

Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f,g

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\left.\begin{array}{l}2f(x) - g(x) = -3x \\ 7f(x) + 2g(x) = -5x\end{array}\right\} \left|\begin{array}{l}2 \\ 1\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}2(2f(x) - g(x)) = 2(-3x) \\ 7f(x) + 2g(x) = -5x\end{array}\right\} \text{ ή } \left.\begin{array}{l}2\bullet 2f(x) - 2g(x) = -6x \\ 7f(x) + 2g(x) = -5x\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}4f(x) - 2g(x) = -6x \\ 7f(x) + 2g(x) = -5x\end{array}\right\} (+)$$

$$4f(x) - 2g(x) + 7f(x) + 2g(x) = -6x - 5x \Longleftrightarrow$$

$$11f(x) = -11x \Longleftrightarrow \frac{11f(x)}{11} = \frac{-11x}{11} \Longleftrightarrow f(x) = -x$$

$$2f(x) - g(x) = -3x \Longleftrightarrow 2(-x) - g(x) = -3x \Longleftrightarrow -2x - g(x) = -3x$$
$$\Longleftrightarrow -g(x) = -3x + 2x \Longleftrightarrow -g(x) = -x \Longleftrightarrow g(x) = x$$

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το IR που ικανοποιούν την σχέση :

$$(f+g)(x)^2 - 2\,fg(x) + 4f(x) - 2g(x) + 5 = 0$$

Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f,g

$(f+g)(x)^2 - 2\, fg(x) + 4f(x) - 2g(x) + 5 = 0 \Longleftrightarrow$

$(f(x)+g(x))^2 - 2\, f(x)g(x) + 4f(x) - 2g(x) + 5 = 0 \Longleftrightarrow$

$f^2(x) + 2\, f(x)g(x) + g^2(x) - 2\, f(x)g(x) + 4f(x) - 2g(x) + 5 = 0 \Longleftrightarrow$

$f^2(x) + g^2(x) + 2\cdot f(x)\cdot 2 - 2\cdot g(x)\cdot 1 + 4 + 1 = 0 \Longleftrightarrow$

$f^2(x) + 2\cdot f(x)\cdot 2 + 2^2 + g^2(x) - 2\cdot g(x)\cdot 1 + 1^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$(f(x)+2)^2 + (g(x)-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+2=0 \\ g(x)-1=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=-2 \\ g(x)=1 \end{array}\right\}$$

6.

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma\ f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\ g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}. \\ (\mathrm{I})\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ (f+g)(x)=2\dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{N}\alpha\ \lambda\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:(f+g)(x)>2,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \end{array}}$$

$(\mathrm{I})\ D_f = \{x\in\mathbb{R} : e^x - e^{-x} \neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση: $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Οπότε: $D_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$D_g = \{x\in\mathbb{R} : e^x + e^{-x} \neq 0\}$

$$\underline{\left.\begin{cases} e^x>0 \\ e^{-x}>0 \end{cases}\right\}(+)}$$

$e^x + e^{-x} > 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} \neq 0$

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x + e^{-x} \neq 0$. Άρα $D_g = \mathbb{R}$

$D_{f+g} = \{x\in\mathbb{R} : x\in D_f,\ x\in D_g\}$

$$x \in D_{f+g} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in D_f \\ x \in D_g \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$\text{Οπότε}: D_{f+g} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} + \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{e^{-x}=\frac{1}{e^x}}{=} \frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}} + \frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}} =$$

$$\frac{\frac{e^xe^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{\frac{e^xe^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}} + \frac{\frac{e^xe^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{\frac{e^xe^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^x}}} + \frac{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} + \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} =$$

$$\frac{(e^{2x}+1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} + \frac{(e^{2x}-1)(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)} = \frac{(e^{2x})^2+2e^{2x}+1}{(e^{2x})^2-1} + \frac{(e^{2x})^2+2e^{2x}+1}{e^{4x}-1} =$$

$$\frac{e^{4x}+\cancel{2e^{2x}}+1+e^{4x}-\cancel{2e^{2x}}+1}{e^{4x}-1} = \frac{2e^{4x}+2}{e^{4x}-1} = 2\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}$$

$$(\text{II})\left\{\begin{matrix} (f+g)(x) > 2 \\ x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \cancel{2}\cdot\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} > \cancel{2}\cdot 1 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \overset{\text{Αν } \gamma>0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία: } \gamma\alpha>\gamma\beta \Leftrightarrow \alpha>\beta}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} > 1 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} - 1 > \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} - \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}-1} > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{e^{4x}+1-(e^{4x}-1)}{e^{4x}-1} > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{e^{4x}+1-e^{4x}+1}{e^{4x}-1} > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{2}{e^{4x}-1} > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} e^{4x}-1 > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} e^{4x} > e^0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0,+\infty)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{1}{x(x+3)}$,

$g\left(x\right)=\dfrac{1}{x\left(x+4\right)}$.Να βρεθεί η διαφορά $f-g$

2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους

$f(x) = \dfrac{1}{x-8}$, $g(x) = (x+3)^{x-3}$

Να βρεθεί το γινόμενο fg

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} -8x, x<0 \\ x^3, x\geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3, x<-2 \\ 2x+8, x\geq 1 \end{cases}$$

Να βρεθεί το άθροισμα f+g

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το IR που ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\left.\begin{aligned} (3f-g)(x) &= -3x \\ (5f+2g)(x) &= -5x \end{aligned}\right\}$$

Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f,g

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το IR που ικανοποιούν την σχέση :

$(f+g)(x)^2-2fg(x)+6f(x)-2g(x)+10=0$

Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f,g

6.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους $f\left(x\right)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}, g\left(x\right)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$.

(Ι) Να αποδείξετε οτι $\left(f+g\right)\left(x\right)=2\dfrac{2^{4x}+1}{2^{4x}-1}, x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

(ΙΙ) Να λυθεί η εξίσωση: $\left(f+g\right)\left(x\right)>2, x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$