

ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΝΤΑΣ
ΤΟΝ ΤΥΠΟ ΤΗΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - 2x$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως φθίνουσα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$$

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 > -2x_2 \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 > -2x_2 \\ \frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 > -2x_2 \\ \frac{6}{\sqrt{x_1}} > \frac{6}{\sqrt{x_2}} \end{array} \right\} (+)$$

$$-2x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} > -2x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

2.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = 3x + \sqrt{x}$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν D_f Α το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Έστω $x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 < 3x_2 \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{array} \right\} (+)$$

$$3x_1 + \sqrt{x_1} < 3x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = -2x^3 - x$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως φθίνουσα

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω: $D_f = \mathbb{R}$

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1^3 > -2x_2^3 \\ -x_1 > -x_2 \end{array} \right\} (+)$$

$$-2x_1^3 - x_1 > -2x_2^3 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = 5x^3 + 3x$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω: $D_f = \mathbb{R}$

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x_1^3 < 5x_2^3 \\ 3x_1 < 3x_2 \end{array} \right\} (+)$$

$$5x_1^3 + 3x_1 < 5x_2^3 + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,5)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-5,0)$

Αν A το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 25 - x^2 \geq 0\}$$

$$\text{Θεωρώ την εξίσωση : } 25 - x^2 = 0 \iff x^2 = 25 \iff x = \pm\sqrt{25}$$

$$\iff x = \pm 5$$

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$		
$25 - x^2$		—	0	+	0	—

$$x \in D_f \Leftrightarrow 25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 5]$$

$$\text{Οπότε : } D_f = [-5, 5]$$

Αν $x_1, x_2 \in (0, 5)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 < x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1^2 > -x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 25 - x_1^2 > 25 - x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (0, 5) \\ 25 - x_1^2, 25 - x_2^2 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{25 - x_1^2} > \sqrt{25 - x_2^2} \\ x_1, x_2 \in (0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 5)$

Αν $x_1, x_2 \in (-5, 0)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 > -x_2 \\ x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 > -x_2 \\ -x_1 > 0 \\ -x_2 > 0 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-x_1)^2 > (-x_2)^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 > x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1^2 < -x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 25 - x_1^2 < 25 - x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \\ 25 - x_1^2, 25 - x_2^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{25 - x_1^2} < \sqrt{25 - x_2^2} \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-5, 0)$

6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -3)$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0\}$$

$$\text{Θεωρώ την εξίσωση : } x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm\sqrt{9}$$

$$\iff x = \pm 3$$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
x^2-9	+	0	-	0	+

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3] \cup [3, +\infty)$$

$$\text{Οπότε : } D_f = (-\infty, 3] \cup [3, +\infty)$$

Αν $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (3, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_1, x_2 \in (3, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 > x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (3, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 - 9 > x_2^2 - 9 \\ x_1, x_2 \in (3, +\infty) \\ x_1^2 - 9, x_2^2 - 9 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x_1^2 - 9} > \sqrt{x_2^2 - 9} \\ x_1, x_2 \in (3, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 > x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1^2 < -x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 25 - x_1^2 < 25 - x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \\ 25 - x_1^2, 25 - x_2^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{25 - x_1^2} < \sqrt{25 - x_2^2} \\ x_1, x_2 \in (-5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(3, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, -3)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 > -x_2 \\ x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 > -x_2 \\ -x_1 > 0 \\ -x_2 > 0 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-x_1)^2 > (-x_2)^2 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 > x_2^2 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 - 9 > x_2^2 - 9 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \\ x_1^2 - 9, x_2^2 - 9 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x_1^2 - 9} > \sqrt{x_2^2 - 9} \\ x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -3)$
7.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f . Τότε θα έχω :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, \sqrt{x} - 1 \neq 0\}$$

$$\text{Θεωρώ την εξίσωση: } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{x})^2 = 1^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 1$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Οπότε: } D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Επειδή } x \geq 0 \text{ θα έχω } x = (\sqrt{x})^2$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \stackrel{x=(\sqrt{x})^2}{=} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{x} + 1$$

$$\text{Οπότε: } f(x) = \sqrt{x} + 1, x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Αν $x_1, x_2 \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \\ x_1, x_2 \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x_1} + 1 < \sqrt{x_2} + 1 \\ x_1, x_2 \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

8.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 1}$$

Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 1 \neq 0\}$$

$$e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 1 > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 0 \Rightarrow e^x + 1 \neq 0$$

Οπότε $e^x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 1} \stackrel{\substack{\text{Προσθαφαιρώ την μονάδα} \\ \text{για να σχηματιστεί στον} \\ \text{αριθμητή το } e^x + 1}}{=} \frac{e^x + 1 - 1 - 3}{e^x + 1} = \frac{(e^x + 1) - 4}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{4}{e^x + 1} = 1 - \frac{4}{e^x + 1}$$

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1} + 1} > \frac{1}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow -\frac{4}{e^{x_1} + 1} < -\frac{4}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow 1 - \frac{4}{e^{x_1} + 1} < 1 - \frac{4}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

9.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την σχέση :

$$f^3(x) + f(x) = e^x + x$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έστω $f(x_1) \geq f(x_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^3(x_1) + f(x_1) = e^{x_1} + x_1 \\ f^3(x_2) + f(x_2) = e^{x_2} + x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + f(x_1) - f^3(x_2) - f(x_2) = e^{x_1} + x_1 - e^{x_2} - x_2 \quad (1)$$

Αν $x_1, x_2 \in \square$ με $x_1 < x_2$. Εστω $f(x_1) \geq f(x_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^3(x_1) + f(x_1) = e^{x_1} + x_1 \\ f^3(x_2) + f(x_2) = e^{x_2} + x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + f(x_1) - f^3(x_2) - f(x_2) = e^{x_1} + x_1 - e^{x_2} - x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\}$$

$$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Rightarrow e^{x_1} + x_1 - e^{x_2} - x_2 < 0 \quad (2)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{array} \right\}$$

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + f(x_1) - f^3(x_2) - f(x_2) \geq 0 \quad (3)$$

Απο τις σχέσεις (1), (2), (3) έχω:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^3(x_1) + f(x_1) - f^3(x_2) - f(x_2) = e^{x_1} + x_1 - e^{x_2} - x_2 \\ e^{x_1} + x_1 - e^{x_2} - x_2 < 0 \\ f^3(x_1) + f(x_1) - f^3(x_2) - f(x_2) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{Άτοπο})$$

Συνεπώς $f(x_1) < f(x_2)$. Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \square$ με $x_1 < x_2$ έχω $f(x_1) < f(x_2)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ	
$\left. \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{array} \right\} (+)$	
<hr/> $\alpha + \gamma < \beta + \delta$	
Αν $\alpha < \beta$ και $\lambda > 0$ τότε : $\lambda\alpha < \lambda\beta$	
Αν $\alpha < \beta$ και $\lambda < 0$ τότε : $\lambda\alpha > \lambda\beta$	
Αν $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta > 0$ τότε: $\alpha^v < \beta^v$, v : Θετικός ακέραιος	

Αν $\alpha < \beta$ τότε: $\alpha^v < \beta^v$, v : Θετικός περιττός ακέραιος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x}} - 3x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x + \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

3.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-4, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 4)$

4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - 81}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -9)$

5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{e^x + 10}{e^x + 5}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την σχέση:

$$f^5(x) + 3f^3(x) = e^{3x} + x^7$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα